Matematická analýza 2

Diferenciál

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Motivace

Příklad

Je dána funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Již dříve jsme ukázali, že funkce f má směrovou derivaci v bodě $(0,0)$ podle jakéhokoli vektoru $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$ a v bodě $(0,0)$ nemá limitu (tedy není spojitá v bodě $(0,0)$).

Motivace

Tvrzení

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a je vnitřní bod množiny D a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak je ekvivalentní:

1. *v bodě a existuje derivace $f'(a)$ funkce f a $f'(a) = \alpha$;*
2. $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \alpha h}{|h|} = 0.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Definice (diferenciál vektorové funkce)

Ať $\boldsymbol{a}$ je vnitřní bod množiny $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$. Lineární zobrazení $\boldsymbol{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se nazývá diferenciál vektorové funkce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$, jestliže

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{L}(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = \boldsymbol{0}.$$

Diferenciál funkce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ budeme označovat symbolem $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ a jeho hodnotu v bodě $\boldsymbol{h}$ budeme označovat symbolem $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{h})$. Má-li funkce $\boldsymbol{f}$ diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$, potom říkáme, že $\boldsymbol{f}$ je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$.

- Platí

  $$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{h}) = \left(\mathrm{d}f_1(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{h}), \ldots, \mathrm{d}f_m(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{h})\right),$$

  má-li jedna ze stran rovnosti smysl.

Diferenciál

Ať $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$. Položme

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{h}) = \begin{cases} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - \mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|}, & \text{je-li } \boldsymbol{a}+\boldsymbol{h} \in D \setminus \{\boldsymbol{a}\}; \\ \mathbf{0}, & \text{je-li } \boldsymbol{h} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

- Existuje okolí $U(\mathbf{0})$ ležící v definičním oboru funkce $\boldsymbol{\omega}$.
- $\lim\limits_{\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{h}) = \mathbf{0} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{0})$.
- Pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ splňující $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h} \in D$ je

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) + \|\boldsymbol{h}\|\, \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{h}).$$

- Pokud $\boldsymbol{h}$ je blízko $\mathbf{0}$, pak

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}).$$

Diferenciál

Příklad

Nechť $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^m$ a vektorová funkce $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je dána předpisem $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$. Potom pro každé $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je identicky nulové zobrazení.

Příklad

Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Potom pro každé $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}.$$

Reprezentace diferenciálu

Definice (gradient a Jacobiho matice)

1. Jestliže $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má všechny parciální derivace (1. řádu) v bodě $\boldsymbol{a}$, potom vektor

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right)$$

se nazývá gradient funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$. Místo $\nabla f(\boldsymbol{a})$ se také často píše grad $f(\boldsymbol{a})$.

2. Jestliže složky $f_1, \dots, f_m$ vektorové funkce $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mají v bodě $\boldsymbol{a}$ všechny parciální derivace (1. řádu), potom $m \times n$ matice

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jacobiho matice funkce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$*.

Reprezentace diferenciálu

Věta (souvislost diferenciálu a směrové derivace)

Jestliže $f_1, \ldots, f_m$ *jsou složky vektorové funkce* $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferencovatelné v bodě* $\boldsymbol{a}$*, potom pro každé* $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ *existuje* $\nabla_{\boldsymbol{h}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ *a*

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{h}) = \nabla_{\boldsymbol{h}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{h} \cdot \nabla f_1(\boldsymbol{a}), \ldots, \boldsymbol{h} \cdot \nabla f_m(\boldsymbol{a}))\,.$$

V takovém případě můžeme s využitím sloupcového zápisu vektorů psát

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{h}) = \nabla_{\boldsymbol{h}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Pokud diferenciál vektorové funkce existuje, je určen jednoznačně.
- Je-li funkce $\boldsymbol{f}$ diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$, pak zobrazení $\boldsymbol{v} \mapsto \nabla_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ je nutně lineární.

Reprezentace diferenciálu

Tvrzení (spojitost diferencovatelné funkce)

Jestliže vektorová funkce $\boldsymbol{f}$ je diferencovatelná v $\boldsymbol{a}$, pak je v $\boldsymbol{a}$ spojitá.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (postačující podmínka existence diferenciálu)

Jestliže vektorová funkce $\boldsymbol{f}$ má na okolí bodu $\boldsymbol{a}$ spojité všechny parciální derivace (1. řádu), pak je v bodě $\boldsymbol{a}$ diferencovatelná.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Reprezentace diferenciálu

Příklad

Je dána funkce

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2$$

Tato funkce je diferencovatelná a

$$\mathrm{d}f(x, y)\,(h, k) = 2xh - 4yk.$$

Příklad

Mějme vektorovou funkci

$$\boldsymbol{f}(x, y) = (x - e^y, x^2 + y).$$

Ta je diferencovatelná v každém bodě a

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(x, y)\,(h, k) = \begin{pmatrix} 1 & -e^y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h - ke^y \\ 2xh + k \end{pmatrix}.$$

Poznámka k zápisu diferenciálu ve fyzice a inženýrství

Ve fyzice se diferenciál reálné funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ často píše ve tvaru

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\mathrm{d}x_n.$$

Jaký význam mají symboly $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$?

- Připomeňme, že i-tá souřadnicová projekce je funkce $\sigma_i(\boldsymbol{a}) = a_i$. Místo σ_i pišme x_i.
- Potom pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ máme

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})\mathrm{d}x_1(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{h}) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\mathrm{d}x_n(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{h}).$$

- Protože $\mathrm{d}x_i(\boldsymbol{a})$ nezávisí na $\boldsymbol{a}$, píšeme jen $\mathrm{d}x_i$ místo $\mathrm{d}x_i(\boldsymbol{a})$. S touto konvencí obdržíme

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\mathrm{d}x_n.$$

Směry největšího růstu a poklesu

Tvrzení (směry největšího růstu a poklesu)

Nechť $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$.

1. *Je-li $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ jednotkový vektor, potom*

$$\nabla_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a}) \in \left[-\left\|\nabla f(\boldsymbol{a})\right\|, \left\|\nabla f(\boldsymbol{a})\right\|\right].$$

2. *Je-li $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq 0$ a $\boldsymbol{h} = \frac{\nabla f(\boldsymbol{a})}{\|\nabla f(\boldsymbol{a})\|}$, potom $\nabla_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a}) = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$.*
3. *Je-li $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq 0$ a $\boldsymbol{h} = -\frac{\nabla f(\boldsymbol{a})}{\|\nabla f(\boldsymbol{a})\|}$, potom $\nabla_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a}) = -\|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

Ať $\nabla f(\boldsymbol{a}) \neq 0$.

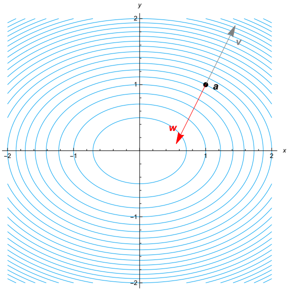
- $\nabla f(\boldsymbol{a})$ ... udává směr největšího růstu funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$.
- $-\nabla f(\boldsymbol{a})$ ... udává směr největšího poklesu funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$.

Směry největšího růstu a poklesu

Příklad

Je dána funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

- Jednotkový vektor udávající směr největšího růstu funkce f v bodě $\boldsymbol{a} = (1, 1)$ je $\boldsymbol{v} = \frac{\nabla f(\boldsymbol{a})}{\|\nabla f(\boldsymbol{a})\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.
- Jednotkový vektor udávající směr největšího poklesu f v bodě $\boldsymbol{a} = (1, 1)$ je $\boldsymbol{w} = -\frac{\nabla f(\boldsymbol{a})}{\|\nabla f(\boldsymbol{a})\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.



Tečná nadrovina

Definice (tečná nadrovina)

Nechť $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$. Tečná nadrovina ke grafu funkce f v bodě $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$ je množina

$$\{(\boldsymbol{x}, x_{n+1}) \,|\, x_{n+1} = f(\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot \nabla f(\boldsymbol{a})\}\,.$$

Pro každé $\alpha \neq 0$ se vektor

$$\alpha\,(\nabla f(\boldsymbol{a}), -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

nazývá normálový vektor ke grafu funkce f v bodě $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$.

Speciální případy:

- $n = 1$ … tečna (případně tečná přímka).
- $n = 2$ … tečná rovina.

Tečná nadrovina

Tečná nadrovina ke grafu funkce v bodě $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$ je graf afinní funkce

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot \nabla f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

Je-li $\boldsymbol{x}$ blízko bodu $\boldsymbol{a}$, pak můžeme psát

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot \nabla f(\boldsymbol{a}).$$

Příklad

Hledejme tečnou rovinu ke grafu funkce

$$f(x, y) = x \operatorname{arctg}\left(xy^2\right).$$

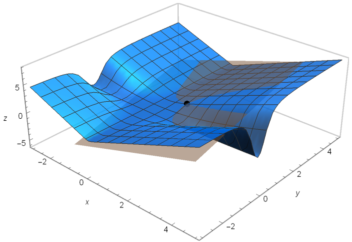
v bodě $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ a přibližnou hodnotu čísla $f\left(\frac{11}{10}, \frac{19}{20}\right)$.

Tečná nadrovina

Příklad (pokračování)

Tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ má rovnici

$$z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi + 2}{4}(x - 1) + (y - 1).$$



Díky tomu $f\left(\frac{11}{10}, \frac{19}{20}\right) \approx \frac{11}{40}\pi$.

Derivace složeného zobrazení

Věta (o derivaci složeného zobrazení)

Ať $\boldsymbol{f} : E \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *je diferencovatelná v bodě* $\boldsymbol{b}$ *a* $\boldsymbol{g} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *je diferencovatelná v bodě* $\boldsymbol{a}$*. Jestliže* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$*, potom funkce* $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ *je diferencovatelná v bodě* $\boldsymbol{a}$ *a platí*

$$\mathrm{d}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \circ \mathrm{d}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) .$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

V řeči Jacobiho matic lze závěr předchozí věty formulovat ve tvaru

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{b})\, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{a}) .$$

Derivace složeného zobrazení

Důsledek (řetízkové pravidlo)

Ať $f : E \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{g} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}$. Jestliže $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ a $h = f \circ \boldsymbol{g}$, potom pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ je

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{b}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\boldsymbol{b}) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

V případě $n = 1$ se řetízkové pravidlo redukuje na

$$h'(a) = \nabla f(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{g}'(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\boldsymbol{b})\, g_j'(a).$$

Derivace složeného zobrazení

Příklad

Nechť $f(u,v) = uv^2$ a $\boldsymbol{g}(x,y) = (x\cos y, x + 2y)$. Z řetízkového pravidla pro $h = f \circ \boldsymbol{g}$ obdržíme

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = (x+2y)^2 \cos y + 2\,(x+2y)\,x\cos y$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -\,(x+2y)^2\, x \sin y + 4\,(x+2y)\,x\cos y.$$

Příklad

Mějme dánu spojitě diferencovatelnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Potom funkce $g(x,y) = f(xy)$ je řešením rovnice

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$$

na $\mathbb{R}^2$.

Aplikace diferenciálu – linearizace soustavy ODR

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ má spojité parciální derivace (prvního řádu) na Ω. Uvažme soustavu diferenciálních rovnic tvaru

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$$

Nechť $\boldsymbol{a} \in \Omega$ je *ekvilibrium* dané soustavy (tj. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$). Protože pro každý bod $\boldsymbol{x}$ blízko bodu $\boldsymbol{a}$ můžeme psát

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\,,$$

je

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{a})\,.$$

Uvážíme-li substituci $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{a}$, dostaneme

$$\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}(t).$$

Tato soustava se nazývá *linearizací* soustavy $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ v bodě $\boldsymbol{a}$.

Aplikace diferenciálu – linearizace soustavy ODR

Příklad

Uvažujme rovnici

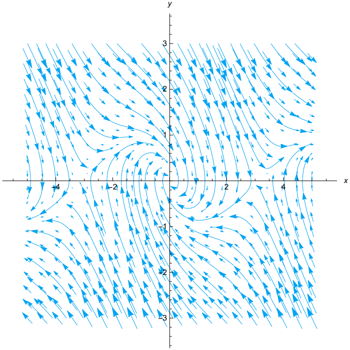
$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -y - \sin x. \end{aligned}$$

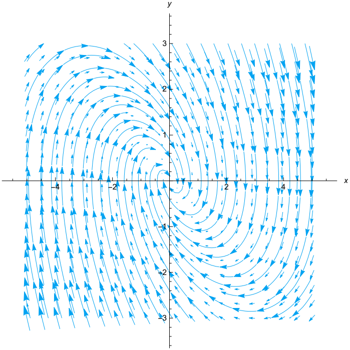
Linearizace této soustavy v bodě $(0,0)$ je

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -y - x. \end{aligned}$$

Aplikace diferenciálu – linearizace soustavy ODR

Příklad (pokračování)





Příklad (pokračování)

Linearizace v bodě $(\pi, 0)$ je

$$x' = y,$$
$$y' = -y + x.$$