Matematická analýza 2

Extrémy funkcí

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Minimum a maximum funkce

Definice (Minimum a maximum funkce)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $M \subseteq D$. Řekneme, že $\boldsymbol{a} \in M$ je bod minima (resp. bod maxima) funkce f na M, jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in M$ je $f(\boldsymbol{a}) \leq f(\boldsymbol{x})$ (resp. $f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})$). Je-li $\boldsymbol{a} \in M$ bod minima (resp. maxima) f na M, pak hodnotu $f(\boldsymbol{a})$ nazýváme minimem (resp. maximem) funkce f na M.

Poznámka:

- $\boldsymbol{a}$ je bod maxima f na M právě tehdy, když $\boldsymbol{a}$ je bod minima $-f$ na M.

Terminologie a značení:

- bod extrému funkce f na M ... bod minima nebo bod maxima.
- extrém funkce f na M ... minimum nebo maximum funkce f na M.
- $\min_{\boldsymbol{x} \in M} f(\boldsymbol{x})$ ... minimum funkce f na M.
- $\max_{\boldsymbol{x} \in M} f(\boldsymbol{x})$ ... maximum funkce f na M.
- Ve všech výše uvedených pojmech často vynecháváme „na M“, jestliže $M = D$.

Minimum a maximum funkce

Příklad

Ať $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$.

1. existuje právě jeden bod minima f (na $\mathbb{R}^n$) a neexistuje žádný bod maxima f (na $\mathbb{R}^n$).
2. f má v každém bodě $M = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ minimum a také maximum na M.
3. f nemá v žádném bodě $M = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 < \|\boldsymbol{x}\|\}$ minimum ani maximum na M.

Příklad

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Funkce f nemá bod minima.

Minimum a maximum funkce

Definice (kompaktní množina)

Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve kompaktní, jestliže je omezená a uzavřená.

Věta (spojitý obraz kompaktu)

Jestliže funkce $\boldsymbol{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *je spojitá na kompaktní množině* $M \subseteq D$*, potom* $\boldsymbol{f}(M) = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \,|\, \boldsymbol{x} \in M\}$ *je kompaktní množina.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (Weierstrassova věta)

Jestliže funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je spojitá na neprázdné kompaktní množině* $M \subseteq D$*, potom existuje bod minima a také bod maxima* f *na* M*.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

Lokální extrémy

Definice (body lokálního extrému)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $M \subseteq D$. Řekneme, že $\boldsymbol{a} \in M$ je bod lokálního minima (resp. maxima) funkce f na M, jestliže existuje okolí $U(\boldsymbol{a})$ tak, že $\boldsymbol{a}$ je bod minima (resp. maxima) f na $M \cap U(\boldsymbol{a})$;

Terminologie:

- bod lokálního extrému funkce f na M ... bod lokálního minima nebo bod lokálního maxima.

Definice (stacionární bod)

Ať funkce f je třídy C^1 na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a}$. Řekneme, že $\boldsymbol{a}$ je stacionární bod funkce f, jestliže $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$.

Věta (Fermatova věta)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega)$ a $M \subseteq \Omega$. Jestliže $\boldsymbol{a} \in \operatorname{int}(M)$ je bod lokálního extrému f na M, pak $\boldsymbol{a}$ je stacionární bod funkce f.

Důkaz: Viz přednáška. ∎

- Fermatova věta dává podmínku nutnou nikoli postačující.
- Jestliže stacionární bod funkce f není bodem lokálního extrému, pak ho nazýváme sedlovým bodem funkce f.

Příklad

Bod $(0,0)$ je sedlový bod funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Střípky z lineární algebry

Značení:

- $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ... množina všech $m \times n$ reálných matic.
- $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ... množina všech $n \times n$ reálných matic.

Ať $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

- Nenulový vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ nazýváme vlastní vektor matice $\boldsymbol{Q}$, existuje-li $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$. Číslo λ se nazývá vlastní číslo matice $\boldsymbol{Q}$.
- Řekneme, že $\boldsymbol{Q}$ je symetrická, jestliže $\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}$.
- Je-li $\boldsymbol{Q}$ symetrická, pak všechna její vlastní čísla jsou reálná a existuje ortonormální báze v $\mathbb{R}^n$ tvořená vlastními vektory matice $\boldsymbol{Q}$.

Střípky z lineární algebry

Definice (definitnost matice)

Ať $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ je symetrická. Řekneme, že $\boldsymbol{Q}$ je

1. pozitivně (resp. negativně) definitní, jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ je $\boldsymbol{Qx} \cdot \boldsymbol{x} > 0$ (resp. $\boldsymbol{Qx} \cdot \boldsymbol{x} < 0$);
2. pozitivně (resp. negativně) semidefinitní, jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je $\boldsymbol{Qx} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0$ (resp. $\boldsymbol{Qx} \cdot \boldsymbol{x} \leq 0$);
3. indefinitní, jestliže Q není pozitivně semidefinitní ani negativně semidefinitní.

- $\boldsymbol{Q}$ je negativně definitní (resp. semidefinitní) právě tehdy, když $-\boldsymbol{Q}$ je pozitivně definitní (resp. semidefinitní).

Střípky z lineární algebry

- Q je pozitivně (resp. negativně) definitní právě tehdy, když má všechna vlastní čísla kladná (resp. záporná).
- Q je pozitivně (resp. negativně) semidefinitní právě tehdy, když má všechna vlastní čísla nezáporná (resp. nekladná).

Příklad

1. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní.
2. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je pozitivně semidefinitní.
3. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ je indefinitní.

Lokální extrémy a Hessova matice

Věta (podmínky optimality druhého řádu)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in C^2(\Omega)$ a $\boldsymbol{a} \in \Omega$ je stacionární bod funkce f.

1. *Je-li $\boldsymbol{a}$ bod lokálního minima funkce f, potom $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{a})$ je pozitivně semidefinitní.*
2. *Je-li $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{a})$ je pozitivně definitní, potom $\boldsymbol{a}$ je bod lokálního minima.*
3. *Je-li $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{a})$ indefinitní, potom $\boldsymbol{a}$ je sedlový bod funkce f.*

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Je-li $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{a})$ pozitivně semidefinitní, pak $\boldsymbol{a}$ nemusí být bod lokáního minima (viz $f(x) = x^3$).

Lokální extrémy a Hessova matice

Příklad

Je dána funkce $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$. Stacionární body jsou

- $(0,0)$ ... sedlový bod;
- $\frac{1}{12}(2,1)$ ... bod lokálního minima.

Předpokládejme, že $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$ a $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Symbolem $\boldsymbol{Q}_I$ označíme matici, která vznikne z $\boldsymbol{Q}$ vynecháním všech řádků a všech sloupců indexovaných prvky z množiny $\{1,\ldots,n\} \setminus I$.

Příklad

Ať $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Potom $\boldsymbol{Q}_{\{1,2,3\}} = \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{Q}_{\{2\}} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$.

Věta (Sylvesterovo kritérium)

Ať $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *je symetrická.*

1. $\boldsymbol{Q}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když pro každé* $k \in \{1, \dots, n\}$ *je* $\det \boldsymbol{Q}_{I_k} > 0$, *kde* $I_k = \{1, \dots, k\}$.
2. $\boldsymbol{Q}$ *je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když* $\det \boldsymbol{Q}_I \geq 0$ *pro každou neprázdnou množinu* $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

Je dána funkce

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + y^2 + \frac{1}{z} + xz.$$

Její jediný stacionární bod je $(1, 0, 1)$. Jedná se o bod lokálního minima.

Lokální extrémy a Hessova matice

Příklad

Hledejme body extrémů funkce

$$f(x, y) = x^2 y - x - y$$

na

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\right\}.$$

- Body minima f na M jsou $(3, 0)$ a $(0, 3)$.
- Bod maxima f na M je jediný, a to bod $(2, 1)$.

Konvexní množina

Definice (konvexní množina)

Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve konvexní, jestliže pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ je $\operatorname{seg}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \subseteq C$.

Příklad

1. $\mathbb{R}^n$ a $\emptyset$ jsou konvexní množiny.
2. Intervaly v $\mathbb{R}$ jsou konvexní množiny.
3. Je-li $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, pak
$$M = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$
je konvexní množina.
4. Ať $r > 0$ a $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Pak $U(\boldsymbol{a}; r)$ a $B(\boldsymbol{a}; r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq r\}$ jsou konvexní množiny.

Konvexní funkce

Definice (konvexní funkce)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $C \subseteq D$ je neprázdná konvexní množina. Řekneme, že f je konvexní na C, jestliže pro všechny $\lambda \in [0, 1]$ a $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ je

$$f(\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda)\boldsymbol{y}) \leq \lambda f(\boldsymbol{x}) + (1 - \lambda) f(\boldsymbol{y}).$$

- Je-li f konvexní na svém definičním oboru, pak krátce říkáme, že f je konvexní.
- Funkce f se nazývá konkávní na C, jestliže $-f$ je konvexní na C.

Příklad

Ať $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$. Funkce $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{c}$ je konvexní.

Konvexní funkce

Věta (body minima konvexní funkce)

Jestliže reálná funkce f je konvexní funkce na C, potom každý bod lokálního minima f na C je bodem minima f na C.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (konvexnost a Hessova matice)

Nechť f je reálná funkce třídy C^2 na otevřené konvexní množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom f je konvexní na Ω právě tehdy, když $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x})$ je pozitivně semidefinitní pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

1. Funkce $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2$ je konvexní.
2. Ať $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ je symetrická a $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$. Potom f je konvexní funkce právě tehdy, když $\boldsymbol{Q}$ je pozitivně semidefinitní.

Konvexní funkce

Příklad

Ať $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Potom

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$$

je konvexní funkce.

Věta (stacionární body konvexní funkce na otevřené množině)

Ať $f \in C^2(\Omega)$ je konvexní funkce na otevřené konvexní množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak $\boldsymbol{a} \in \Omega$ je bod minima funkce f (na Ω) právě tehdy, když $\nabla f(\boldsymbol{a}) = 0$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Funkce

$$f(x, y) = x^4 + y^2$$

je konvexní třídy C^∞. Má jediný bod minima, a to bod $(0, 0)$.

Metoda nejmenších čtverců

Ať $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Hledejme body minima funkce

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 .$$

- Hledáme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tak, aby vzdálenost mezi $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{b}$ byla co nejmenší.
- Má-li soustava $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ řešení, pak množina jejích řešení se rovná množině všech bodů minima funkce f.
- O bodech minima funkce f se často mluví jako o řešeních soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ve smyslu nejmenších čtverců.

Tvrzení

Ať $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Potom $\boldsymbol{a}$ je bod minima funkce $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$ právě tehdy, když $\boldsymbol{a}$ je řešením soustavy rovnic

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Metoda nejmenších čtverců

Příklad

Ať $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$. Řešení soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ve smyslu nejmenších čtverců je $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Příklad

Metodou nejmenších čtverců proložte body $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$ graf afinní funkce $\alpha x + \beta$. Hledané parametry jsou $\alpha = \frac{6}{5}$ a $\beta = \frac{8}{5}$.

Vázané extrémy

Je dána funkce

$$f(x, y) = y - 2x$$

a množina

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 - 1 = 0 \right\}.$$

Jak nalézt body extrému funkce f na M?

- Označme $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.
- V bodech extrému musí být ∇f a ∇g rovnoběžné.

Vázané extrémy

Věta (Lagrangeova věta o multiplikátorech)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *je otevřená,* $f, g_1, \ldots, g_k \in C^1(\Omega)$, *kde* $k < n$, *a*

$$M = \{\boldsymbol{x} \in \Omega \,|\, g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots, g_k(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

Předpokládejme, že $\boldsymbol{a} \in M$ *je bod lokálního extrému* f *na* M *a vektory* $\nabla g_1(\boldsymbol{a}), \ldots, \nabla g_k(\boldsymbol{a})$ *tvoří lineárně nezávislou množinu. Potom existují* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *tak, že*

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ z předchozí věty se nazývají Lagrangeovy multiplikátory.

Vázané extrémy

- $\mathscr{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x})$ ... Lagrangeova funkce.
- Bod $\boldsymbol{x} \in \Omega$ je kandidát na bod lokálního extrému f na M, existuje-li $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ tak, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \cdots = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0, \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \cdots = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0. \end{aligned}$$

Příklad

Ať $f(x, y) = x^2 + y^2$ a $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-1)^2 = 0\right\}$. Bod minima je zřejmě $(1, 0)$, ale neexistuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\nabla f(1, 0) + \lambda \nabla g(1, 0) = (0, 0),$$

kde $g(x, y) = (x-1)^2$. To však není spor s Lagrangeovou větou o multiplikátorech, neboť $\nabla g(1, 0)$ netvoří lineárně nezávislou množinu.

Vázané extrémy

Příklad

Ať

$$f(x,y,z) = 3x + 3y + 8z$$

a

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Bod $\frac{1}{5}(3,3,4)$ je bod maxima a $-\frac{1}{5}(3,3,4)$ je bod minima f na M.

Příklad

Najděte délky x, y, z hran krabice tvaru kvádru tak, aby krabice měla co největší objem za podmínky, že obsah jejího povrchu bez víka bude $12\,\text{dm}^2$. Hledané délky stran jsou $x = y = 2\,\text{dm}$ a $z = 1\,\text{dm}$.