Matematická analýza 2

Lebesgueův integrál

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Kvádr v $\mathbb{R}^n$ a jeho objem

- Ať pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ jsou a_k, b_k reálná čísla splňující $a_k \le b_k$. Množina

$$\begin{aligned} Q &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in [a_1, b_1], \dots, x_n \in [a_n, b_n]\} \end{aligned}$$

  se nazve kvádr v $\mathbb{R}^n$. Objem kvádru Q je reálné číslo

$$\mathrm{vol}(Q) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

- Množinu všech kvádrů v $\mathbb{R}^n$ označíme symbolem $\mathcal{K}^n$.

Příklad

1. $Q = [0,0] \times [0,0] = [0,0]^2 = \{(0,0)\} \in \mathcal{K}^2$ a $\mathrm{vol}(Q) = 0$.
2. $Q = [0,1] \times [0,2] \times [0,3] \in \mathcal{K}^3$ a $\mathrm{vol}(Q) = 6$.

Vnější Lebesgueova míra

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ... množina všech podmnožin množiny $\mathbb{R}^n$.

Definice (vnější Lebesgueova míra)

Zobrazení $\lambda_n^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ dané předpisem

$$\lambda_n^*(M) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{vol}(Q_k) \,\middle|\, Q_k \in \mathcal{K}^n \text{ pro každé } k \in \mathbb{N} \text{ a } M \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} Q_k \right\}$$

se nazývá (n-rozměrná) vnější Lebesgueova míra.

Vnější Lebesgueova míra

Tvrzení (vlastnosti vnější Lebesgueovy míry)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. *Je-li* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, *pak* $\lambda_n^*(M + \boldsymbol{a}) = \lambda_n^*(M)$.
2. *Je-li* $N \subseteq M$, *pak* $\lambda_n^*(N) \leq \lambda_n^*(M)$.
3. $\lambda_n^*(\emptyset) = 0$.
4. *Jestliže* M *je omezená, pak* $\lambda_n^*(M) < +\infty$.
5. *Je-li* $Q \in \mathcal{K}^n$, *pak* $\lambda_n^*(Q) = \mathrm{vol}(Q)$.

Důkaz: Jen body 1 až 4. ∎

Příklad

1. Jestliže $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je spočetná množina, pak $\lambda_n^*(M) = 0$.
2. $\lambda_n^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

Lze „objem“ přiřadit rozumně každé množině?

- Lze ukázat, že existují disjunktní množiny $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ tak, že $\lambda_n^*(M \cup N) \neq \lambda_n^*(M) + \lambda_n^*(N)$.

Existuje $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ tak, aby množinám přiřazovalo jejich „objem“ a přitom mělo rozumné vlastnosti?

Tvrzení

Neexistuje funkce $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ *splňující*

1. $\mu\left([0,1]^n\right) = 1$*;*
2. $\mu(M + \boldsymbol{a}) = \mu(M)$ *pro každé* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *a každé* $M \subseteq \mathbb{R}^n$*.*
3. $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} M_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(M_k)$*, kdykoli* $(M_k)_{k=1}^{+\infty}$ *je posloupnost po dvou disjunktních podmnožin množiny* $\mathbb{R}^n$*.*

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Banachův-Tarského paradox.
- Řešení problému s aditivitou: jen některým množinám přiřadíme „objem“.

Měřitelné množiny

Definice (lebesgueovsky měřitelné množiny)

Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tak, že $M \subseteq V$ a $\lambda_n^*(V \setminus M) < \varepsilon$. Množinu všech lebesgueovsky měřitelných množin v $\mathbb{R}^n$ označíme symbolem $\mathcal{A}^n$.

Tvrzení (vlastnosti $\mathcal{A}^n$)

1. *Je-li* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *otevřená, pak* $M \in \mathcal{A}^n$. *Speciálně* $\emptyset \in \mathcal{A}^n$.
2. *Je-li* $M \in \mathcal{A}^n$, *pak* $\mathbb{R}^n \setminus M \in \mathcal{A}^n$.
3. *Je-li* $(M_k)_{k=1}^{+\infty}$ *posloupnost prvků z* $\mathcal{A}^n$, *pak* $\bigcup_{k=1}^{+\infty} M_k \in \mathcal{A}^n$ *a také* $\bigcap_{k=1}^{+\infty} M_k \in \mathcal{A}^n$.
4. *Jestliže* $M, N \in \mathcal{A}^n$, *pak* $M \setminus N \in \mathcal{A}^n$.
5. *Jestliže* $M \in \mathbb{R}^n$ *a* $\lambda_n^*(M) = 0$, *pak* $M \in \mathcal{A}^n$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Lebesgueova míra

Definice

Zobrazení $\lambda_n : \mathcal{A}^n \to [0, +\infty]$ definované předpisem $\lambda_n(M) = \lambda_n^*(M)$ se nazve (n-rozměrná) Lebesgueova míra.

Tvrzení (vlastnosti Lebesgueovy míry)

1. $\lambda_n(\emptyset) = 0$.
2. *Jestliže* $M, N \in \mathcal{A}^n$ *a* $N \subseteq M$, *pak* $\lambda_n(N) \leq \lambda_n(M)$.
3. *Jestliže* $(M_k)_{k=1}^{+\infty}$ *je posloupnost po dvou disjunktních množin ležících v* $\mathcal{A}^n$, *pak* $\lambda_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(M_k)$.
4. *Jestliže* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ *a* $M \in \mathcal{A}^n$, *pak* $\lambda_n(M + \boldsymbol{a}) = \lambda_n(M)$.
5. *Jestliže* $M \in \mathcal{A}^n$ *je omezená, pak* $\lambda_n(M) < +\infty$.

Důkaz: Plyne okamžitě z předchozích tvrzení. ■

Množiny míry nula

Definice (množina míry nula)

Řekneme, že $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je množina (Lebesgueovy) míry nula, jestliže $\lambda_n(M) = 0$.

- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je množina míry nula právě tehdy, když $\lambda_n^*(M) = 0$.
- Každá podmnožina množiny míry nula je opět množina míry nula.

Definice (pojem skoro všude)

Ať $M \in \mathcal{A}^n$. Řekneme, že výroková forma $V(\boldsymbol{x})$ platí skoro všude na M (případně pro skoro všechna $\boldsymbol{x} \in M$), jestliže existuje množina $N \subseteq M$ tak, že $\lambda_n(N) = 0$ a $V(\boldsymbol{x})$ platí pro všechna $\boldsymbol{x} \in M \setminus N$.

Příklad

Ať $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ a $g(x) = 0$. Pak $f(x) = g(x)$ skoro všude na $\mathbb{R}$.

Měřitelné funkce

Definice (měřitelné funkce)

Ať $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a množina $M \subseteq D$ je měřitelná. Řekneme, že $f : D \to \mathbb{R}$ je měřitelná na M, jestliže pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$f^{-1}((a, +\infty)) \cap M = \{\boldsymbol{x} \in M \mid f(\boldsymbol{x}) \in (a, +\infty)\} \in \mathcal{A}^n.$$

Příklad

Funkce $f = \chi_M$ je měřitelná na $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $M \in \mathcal{A}^n$.

Tvrzení (vlastnosti měřitelných funkcí)

Ať funkce f a g jsou měřitelné na $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. *Funkce $f + g$ a fg jsou měřitelné na M.*
2. *Je-li $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$ pro všechna $\boldsymbol{x} \in M$, pak funkce $\frac{f}{g}$ je měřitelná na M.*
3. *Funkce $h = \max\{f, g\}$ je měřitelná na M.*

Důkaz: Vynecháváme. ■

Měřitelné funkce

Příklad

Jestliže f je měřitelná na M, potom $|f|$ je měřitelná na M.

Tvrzení (spojitost implikuje měřitelnost)

Jestliže f je spojitá na $M \in \mathcal{A}^n$, potom f je měřitelná na M.

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Tvrzení

Nechť $M \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $M \in \mathcal{A}^n$. Jestliže $f : D \to \mathbb{R}$ je měřitelná skoro všude na M, pak f je měřitelná na M.

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Definice (jednoduchá funkce)

Funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazve jednoduchá, jestliže je měřitelná na D a navíc $f(D) = \{f(\boldsymbol{x}) \,|\, \boldsymbol{x} \in D\}$ je konečná množina.

Lebesgueův integrál

- Konvence v této kapitole: $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Definice (Lebesgueův integrál jednoduché nezáporné funkce)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je jednoduchá nezáporná funkce a $M \subseteq D$ je měřitelná množina. Potom Lebesgueův integrál funkce f přes M definujeme předpisem

$$\int_M f := \sum_{c \in f(D)} c\lambda_n\big(f^{-1}(\{c\}) \cap M\big)$$

Příklad

1. Jestliže $M \in \mathcal{A}^n$, pak $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_M = \int_M 1 = \lambda_n(M)$. Odtud například $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,+\infty)} = +\infty$ a $\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{[0,1]\times[0,2]} = 2$.
2. Jestliže $f = \chi_{[-2,2]} + 2\chi_{[1,3]\cup[4,6]}$, potom $\int_{\mathbb{R}} f = 12$.
3. $\int_{[0,1]} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} = 0$.

Lebesgueův integrál

Definice (Lebesgueův integrál nezáporné měřitelné funkce)

Ať f je nezáporná měřitelná funkce na $M \in \mathcal{A}^n$. Potom **Lebesgueův integrál funkce f přes M** definujeme předpisem

$$\int_M f := \sup \left\{ \int_M g \,\middle|\, 0 \leq g \leq f \text{ na } M \text{ a } g : M \to \mathbb{R} \text{ je jednoduchá} \right\}.$$

- Je-li $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nezáporná měřitelná funkce na D a $M \subseteq D$ je měřitelná množina, potom $\int_M f = \int_D f\chi_M$.

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Potom definujeme funkce

$$f^+ := \max\{f, 0\}$$
$$f^- := \max\{-f, 0\}$$

- Zřejmě $f = f^+ - f^-$ a $|f| = f^+ + f^-$.
- Je-li f měřitelná, pak f^+ a f^- jsou měřitelné.

Lebesgueův integrál

Definice (Lebesgueův integrál)

Ať f je měřitelná funkce na $M \in \mathcal{A}^n$. Potom Lebesgueův integrál funkce f přes M definujeme předpisem

$$\int_M f := \int_M f^+ - \int_M f^-,$$

má-li pravá strana smysl (tj. alespoň jeden z integrálů vpravo je konečný). Řekneme, že f je (lebesgueovsky) integrovatelná na M, jestliže $\int_M f$ je reálné číslo.

- Místo $\int_M f$ se někdy používá některý z následujících symbolů:

$$\int_M f \, \mathrm{d}\lambda_n \, , \int_M f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\lambda_n(\boldsymbol{x}), \int_M f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Vlastnosti Lebesgueova integrálu

Tvrzení (základní vlastnosti Lebesgueova integrálu)

1. *Jestliže* f, g *jsou integrovatelné funkce na* M *a* $\alpha \in \mathbb{R}$, *potom* $\int_M f + \alpha g = \int_M f + \alpha \int_M g$
2. *Funkce* f *je integrovatelná na* M *právě tehdy, když* $\int_M |f| < +\infty$.
3. *Jestliže* f *je integrovatelná na* M, *potom* $\left|\int_M f\right| \leq \int_M |f|$.
4. *Ať Lebesgueovy integrály* $\int_M f$ *a* $\int_M g$ *existují. Jestliže* $f \leq g$ *skoro všude na* M, *pak* $\int_M f \leq \int_M g$.
5. *Je-li* f *definována na* $M \in \mathcal{A}^n$ *a* $f = 0$ *skoro všude na* $M \in \mathcal{A}^n$, *pak* $\int_M f = 0$.
6. *Jestliže* $M, N \in \mathcal{A}^n$ *jsou disjunktní a* f *je integrovatelná funkce na* $M \cup N$, *potom* $\int_{M \cup N} f = \int_M f + \int_N f$.

Důkaz: Jen body 2 a 3. ■

- Jestliže f je spojitá na kompaktní množině M, pak existuje $\int_M f$ a je konečný.

Tvrzení (souvislost Riemannova a Lebesgueova integrálu)

Jestliže funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$, pak je i lebesgueovsky integrovatelná na $[a,b]$ a oba integrály se rovnají.

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Lebesgueův integrál funkce f přes interval s krajními body a, b, kde $a \leq b$, budeme také značit symbolem $\int_a^b f$ nebo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Tvrzení (Lebesgueův integrál a primitivní funkce)

Jestliže f je spojitá na (a,b), F je primitivní funkce k f na (a,b) a existuje Lebesgueův integrál f přes (a,b), potom

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Fubiniho věta

Ať $M \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.

- Pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ definujeme $M^{[\boldsymbol{x}]} := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \,|\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in M\}$.
- Pro každé $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ definujeme $M^{[\boldsymbol{y}]} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in M\}$

Věta (Fubiniho věta)

Nechť $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce na $M \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$. Potom existují funkce $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tak, že

1. $F(\boldsymbol{x}) = \int_{M^{[\boldsymbol{x}]}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\lambda_n(\boldsymbol{y})$ *pro skoro všechna* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$;
2. $G(\boldsymbol{y}) = \int_{M^{[\boldsymbol{y}]}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\lambda_m(\boldsymbol{x})$ *pro skoro všechna* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$;
3. $$\int_M f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\lambda_{m+n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} F(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\lambda_m(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\lambda_n(\boldsymbol{y}).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Fubiniho věta

Příklad

Z rovností
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}$$
plyne, že
$$\int_1^\infty\int_1^\infty\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\neq\int_1^\infty\int_1^\infty\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Příklad

Nechť
$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x\geq 0, 0\leq y\leq 1-2x\right\}.$$
Potom
$$\int_M x+y=\frac{1}{8}.$$

Fubiniho věta

Příklad

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_0^{2-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Příklad

Ať M je omezená množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + y + z = 1$. Potom

$$\int_M z^2 = \frac{1}{60}.$$

Věta o substituci

Věta (věta o substituci)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *je otevřená množina,* $\boldsymbol{\Phi} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je prosté zobrazení třídy* C^1 *a* $\det \boldsymbol{J_\Phi}(\boldsymbol{x}) \neq 0$ *pro všechna* $\boldsymbol{x} \in \Omega$. *Jestliže* $M \subseteq \Omega$ *a* $f : \boldsymbol{\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$, *potom*

$$\int_{\boldsymbol{\Phi}(M)} f(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\lambda_n(\boldsymbol{y}) = \int_M f(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})) \left|\det \boldsymbol{J_\Phi}(\boldsymbol{x})\right| \, \mathrm{d}\lambda_n(\boldsymbol{x}),$$

má-li jedna strana smysl.

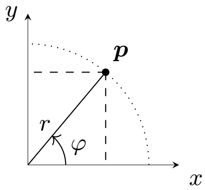
Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

Ať $f(x,y) = x - y$ a M je rovnoběžník s vrcholy $(0,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$ a $(5,3)$. Potom

$$\int_M f = 4.$$

Polární souřadnice



Ať $\mathbf{\Psi} : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem

$$\mathbf{\Psi}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

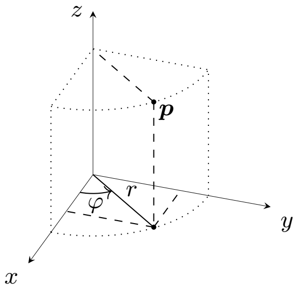
- $\det \boldsymbol{J}_{\mathbf{\Psi}}(r, \varphi) = r > 0.$
- $\mathbf{\Psi}$ je třídy C^∞, avšak není prosté. Proto zmenšíme definiční obor.
- Jestliže $\Omega = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$, pak $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}\restriction_\Omega$ je prosté zobrazení a $\mathbf{\Phi}(\Omega) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \,|\, x \geq 0\}$.
- Jestliže $\Omega = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$, pak $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}\restriction_\Omega$ je prosté zobrazení a $\mathbf{\Phi}(\Omega) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \,|\, x \leq 0\}$.

Polární souřadnice

Příklad

1. Jestliže $g(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, pak
$$\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} g(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}} g(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$
2. Ať $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$ a $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \le x^2+y^2 \le 3\right\}$. Potom
$$\int_M f = \pi.$$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Válcové souřadnice



Ať $\boldsymbol{\Psi} : (0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem

$$\boldsymbol{\Psi}(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

- $\det \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\Psi}}(r, \varphi) = r > 0.$
- $\boldsymbol{\Psi}$ je třídy C^∞, ale není prosté.
- Jestliže $\Omega = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, pak $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Psi}\restriction_\Omega$ je prosté zobrazení a $\boldsymbol{\Phi}(\Omega) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \,|\, z \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.

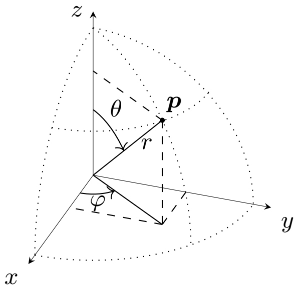
Válcové souřadnice

Příklad

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je homogenní těleso s hustotou $\varrho(x, y, z) = 1$ ohraničené válcovou plochou $x^2 + y^2 = 1$, rovinou $z = 0$ a paraboloidem $z = 4 + x^2 + y^2$. Moment setrvačnosti tělesa M vzhledem k ose z je

$$I_z = \int_M (x^2 + y^2)\varrho(x, y, z) = \frac{7}{3}\pi.$$

Sférické souřadnice



Ať $\mathbf{\Psi} : (0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem

$$\mathbf{\Psi}(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta).$$

- $\det \boldsymbol{J}_{\mathbf{\Psi}}(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin\theta$.
- $\mathbf{\Psi}$ je třídy C^∞, ale není prosté.
- Je-li $\Omega = (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, pak $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}\restriction_\Omega$ je prosté zobrazení, $\det \boldsymbol{J}_{\mathbf{\Phi}}(r, \theta, \varphi) > 0$ a
$$\mathbf{\Phi}(\Omega) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}, x \geq 0\}.$$

Sférické souřadnice

Příklad

Objem množiny $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ohraničené sférou $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ a kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ je

$$\lambda_3(M) = \int_M 1 = \pi.$$