Matematická analýza 2

Křivkový integrál

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Oblouk

Definice (oblouk)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$. Řekneme, že $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je oblouk, jestliže existuje vektorová funkce $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tak, že

1. $\boldsymbol{\varphi}([a, b]) = C$;
2. kdykoli $\boldsymbol{\varphi}(s) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ a $s < t$, potom $s = a$ a $t = b$;
3. $\boldsymbol{\varphi}'$ je spojitá na $[a, b]$ (v krajních bodech intervalu uvažujeme jednostranné derivace);
4. $\boldsymbol{\varphi}'(t) \neq \mathbf{0}$ pro každé $t \in (a, b)$.

Zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ se nazývá parametrizace oblouku C.

Oblouk

Příklad

1. Ať $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ jsou dva různé body. Potom $\operatorname{seg}(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^n$ je oblouk, jehož jedna z parametrizací je
$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{p} + t(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}), \quad t \in [0, 1].$$
2. Kružnice v rovině se středem (S_1, S_2) a poloměrem $R > 0$ je oblouk. Parametrizace je například
$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (S_1 + R\cos t, S_2 + R\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$
3. Ať $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ má spojitou derivaci na nedegenerovaném intervalu $[a, b]$. Potom graf funkce f je oblouk v $\mathbb{R}^2$. Jeho parametrizace je například
$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a, b].$$

Vztah mezi parametrizacemi oblouku

Ať $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval a funkce $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ je taková, že

1. g' je spojitá na $[c,d]$;
2. $g'(t) \neq 0$ pro každé $t \in (c,d)$;
3. $g([c,d]) = [a,b]$.

Jestliže $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je parametrizace oblouku C, potom $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} \circ g$ je také parametrizace oblouku C.

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{\psi} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ jsou dvě parametrizace oblouku C, potom existuje funkce $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ zobrazující $[c,d]$ na $[a,b]$ tak, že $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} \circ g$, g' je spojitá na $[c,d]$ a $g'(t) \neq 0$ pro každé $t \in (c,d)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Vztah mezi parametrizacemi oblouku

- Parametrizace φ a ψ oblouku C jsou souhlasné, jestliže zobrazení g z předchozího tvrzení je rostoucí.
- Parametrizace φ a ψ oblouku C jsou nesouhlasné, jestliže zobrazení g z předchozího tvrzení je klesající.
- Je-li $\boldsymbol{\varphi}[a,b] \to \mathbb{R}^n$ parametrizace oblouku C, pak se body $\boldsymbol{\varphi}(a)$ a $\boldsymbol{\varphi}(b)$ nazývají krajní body oblouku C.
- Pojem krajního bodu nezávisí na parametrizaci.

Příklad

Uvažme

1. $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t,t)$, $t \in [0,4]$;
2. $\boldsymbol{\psi}(t) = (t^2,t^2)$, $t \in [0,2]$;
3. $\boldsymbol{\omega}(t) = (-t,-t)$, $t \in [-4,0]$.

Zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ jsou souhlasné parametrizace oblouku $\operatorname{seg}((0,0);(4,4))$, zatímco $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\omega}$ jsou nesouhlasné parametrizace oblouku $\operatorname{seg}((0,0);(4,4))$.

Křivkový integrál reálné funkce podél oblouku

Definice (křivkový integrál podél oblouku)

Nechť C je oblouk s parametrizací $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ a f je reálná funkce spojitá na C. Potom křivkový integrál funkce f podél oblouku C definujeme předpisem

$$\int_C f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s := \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t))\,\left\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\right\|\,\mathrm{d}t.$$

Věta (nezávislost křivkového integrálu podél oblouku na parametrizaci)

Jsou-li $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{\psi} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ dvě parametrizace oblouku C a f je reálná funkce spojitá na C, potom

$$\int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t))\,\left\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\right\|\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(\boldsymbol{\psi}(u))\,\left\|\boldsymbol{\psi}'(u)\right\|\,\mathrm{d}u.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Křivkový integrál reálné funkce podél oblouku

Definice (délka oblouku)

Délka oblouku $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je reálné číslo $L(C) := \int_C 1 \,\mathrm{d}s$.

Příklad

1. Jestliže $C = \operatorname{seg}(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{q}) \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$, jsou dva různé body, pak $L(C) = \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}\|$.
2. Jestliže $C \subseteq \mathbb{R}^2$ je kružnice se středem (S_1, S_2) a poloměrem $R > 0$, pak $L(C) = 2\pi R$.
3. Jestliže $f(x, y, z) = x^2 y$ a oblouk C má parametrizaci $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, potom

$$\int_C f(x, y, z) \,\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Křivka

Definice (křivka)

Ať $-\infty < a < b < +\infty$. Řekneme, že $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je křivka, jestliže existují body $p_0, \dots, p_k \in [a, b]$ a spojitá vektorová funkce $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tak, že

1. $C = \boldsymbol{\varphi}([a, b])$;
2. $a = p_0 < p_1 < \cdots < p_k = b$;
3. pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ je $C_i = \boldsymbol{\varphi}([p_{i-1}, p_i])$ oblouk s parametrizací $\boldsymbol{\varphi} \upharpoonright_{[p_{i-1}, p_i]}$;
4. Je-li $i \neq j$, pak $C_i \cap C_j$ je nejvýše dvouprvkovou podmnožinou množiny všech krajních bodů oblouků C_i a C_j.

Zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ se nazývá parametrizace křivky C. Konečná posloupnost $(C_i)_{i=1}^k$ se nazývá rozklad křivky C na oblouky.

- Definice křivky C lze zobecnit tak, že C nemusí být nutně kompaktní (tj. C pak může být například i přímka). My si však vystačíme s definicí výše uvedenou.

Křivka

Terminologie:

- Je-li $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ parametrizace křivky C, pak body $\boldsymbol{\varphi}(a)$, $\boldsymbol{\varphi}(b)$ nazýváme krajní body křivky C.
- Křivka C se nazve uzavřená, jestliže existuje její parametrizace $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ taková, že $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$.
- Křivka C se nazve jednoduchá, jestliže existuje její parametrizace $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ taková, že $\boldsymbol{\varphi}(s) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ a $s < t$ implikuje $s = a$ a $t = b$.

Příklad

1. Každý oblouk je jednoduchá křivka.
2. Ať $C \subseteq \mathbb{R}^2$ je hranice trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Potom C není oblouk, ale je to jednoduchá uzavřená křivka.

Křivkový integrál reálné funkce

Definice (křivkový integrál)

Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je křivka, $(C_i)_{i=1}^k$ je její rozklad na oblouky a f je reálná funkce spojitá na C. Potom křivkový integrál funkce f podél křivky C definujeme předpisem

$$\int_C f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s := \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s.$$

Délka křivky C je číslo $L(C) := \int_C 1\,\mathrm{d}s$.

- Místo $\int_C f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s$ se občas také píše $\int_C f$.
- Definice křivkového integrálu nezávisí na rozkladu křivky na oblouky.

Příklad

Ať C je hranice čtverce $[0,1]^2$. Potom

$$\int_C x^2 + y\,\mathrm{d}s = \frac{11}{3}.$$

Tečné vektorové pole

Definice (tečné vektorové pole)

Ať $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je křivka s parametrizací $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ a

$$D = \left\{ \boldsymbol{\varphi}(t) \,\middle|\, t \in (a, b) \text{ a } \boldsymbol{\varphi}'(t) \text{ existuje oboustranná a nenulová} \right\}.$$

Vektorové pole $\boldsymbol{\tau} : D \to \mathbb{R}^n$ definované předpisem

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varphi}(t)) := \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|}$$

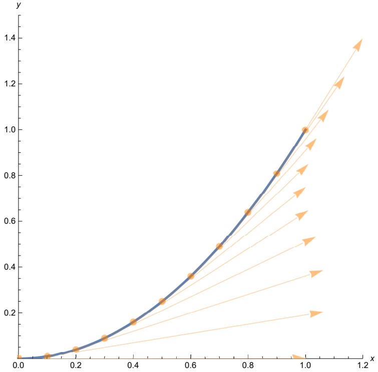
nazýváme jednotkové tečné vektorové pole křivky C (indukované parametrizací $\boldsymbol{\varphi}$).

- $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})$ … tečný vektor křivky C v bodě $\boldsymbol{x}$ (indukovaný parametrizací $\boldsymbol{\varphi}$).

Příklad

Jestliže $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1]$, potom

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \right), \quad t \in (0,1).$$

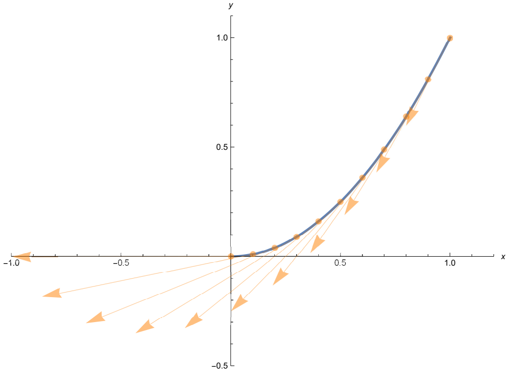


Tečné vektorové pole

Příklad

Jestliže $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1-t, (1-t)^2)$, $t \in [0,1]$, potom

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1+4(1-t)^2}}, -\frac{2(1-t)}{\sqrt{1+4(1-t)^2}} \right), \quad t \in (0,1).$$



Orientace křivky

Definice (orientace křivky)

Každé jednotkové tečné vektorové pole $\boldsymbol{\tau}$ křivky $C \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme orientací křivky C. Dvojici $(C, \boldsymbol{\tau})$ nazýváme orientovanou křivkou.

- Pokud nemůže dojít k nedorozumění, píšeme místo $(C, \boldsymbol{\tau})$ jen C.
- Jednoduchá křivka (speciálně oblouk) má jen dvě různé orientace.
- Obecná křivka může mít více než dvě orientace.
- Orientace určuje způsob procházení křivky.
- Ať C je křivka, jejíž orientace je indukovaná parametrizací $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}$. Potom $\boldsymbol{\varphi}(a)$ se nazve počáteční bod orientované křivky C a $\boldsymbol{\varphi}(b)$ se nazve koncový bod orientované křivky C.
- Jednoduchá uzavřená křivka $C \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá Jordanova křivka.
- Řekneme, že Jordanova křivka je kladně orientovaná (resp. záporně orientovaná), jestliže ji procházíme proti (resp. po) směru hodinových ručiček.

Křivkový integrál vektorového pole

Definice (křivkový integrál vektorového pole)

Ať $(C, \boldsymbol{\tau})$ je orientovaná křivka, $(C_i)_{i=1}^k$ je rozklad křivky C na oblouky a $\boldsymbol{F}$ je spojité vektorové pole na C. Potom křivkový integrál vektorového pole $\boldsymbol{F}$ podél $(C, \boldsymbol{\tau})$ definujeme předpisem

$$\int_{(C,\boldsymbol{\tau})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} := \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}s.$$

- Jestliže C je oblouk a orientace $\boldsymbol{\tau}$ je indukovaná parametrizací $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, potom

$$\int_{(C,\boldsymbol{\tau})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Křivkový integrál vektorového pole

Alternativní značení integrálu $\int_{(C,\boldsymbol{\tau})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$:

- $\int_{(C,\boldsymbol{\tau})} \boldsymbol{F}$;
- Nemůže-li dojít k nedorozumění, pak píšeme $\int_C \boldsymbol{F}$ nebo $\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$.
- Ve fyzice se občas místo $\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ píše

$$\int_C F_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + F_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_n.$$

Tvrzení

Nechť C je jednoduchá křivka a $\boldsymbol{F}$ je vektorové pole spojité na C. Jestliže $\boldsymbol{\tau}$ a $\boldsymbol{\sigma}$ jsou dvě různé orientace křivky C, potom

$$\int_{(C,\boldsymbol{\tau})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{(C,\boldsymbol{\sigma})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Křivkový integrál vektorového pole

Příklad

1. Ať $C \subseteq \mathbb{R}^3$ je úsečka orientovaná tak, že $(0,0,0)$ je její počáteční bod a $(1,2,3)$ je její koncový bod. Jestliže $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y,-z,x)$

$$\int_C \boldsymbol{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{1}{2}.$$

2. Ať $C \subseteq \mathbb{R}^3$ je úsečka orientovaná tak, že $(1,2,3)$ je její počáteční bod a $(0,0,0)$ je její koncový bod. Jestliže $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y,-z,x)$

$$\int_C \boldsymbol{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}.$$

3. Ať $C \subseteq \mathbb{R}^2$ je kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v bodě $\mathbf{0}$. Jestliže $\boldsymbol{F}(x,y) = (-y,x)$, potom

$$\int_C \boldsymbol{F}(x,y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 2\pi.$$

Oblast

Definice (Oblast)

Otevřená množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve oblast, jestliže každé dva body z M je možné spojit lomenou čarou ležící v M (tj. pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ existují $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k \in M$ tak, že $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{y}$ a $\bigcup_{j=1}^{k-1} \operatorname{seg}(\boldsymbol{x}_j; \boldsymbol{x}_{j+1}) \subseteq M$).

Příklad

Každá otevřená konvexní množina je oblast. Speciálně každé okolí $U(\boldsymbol{x})$ bodu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je oblast.

Věta (Jordanova věta)

Je-li C Jordanova křivka v $\mathbb{R}^2$, pak $\mathbb{R}^2 \setminus C$ je sjednocení omezené oblasti $\operatorname{Int} C$ a neomezené oblasti $\operatorname{Ext} C$, které nemají žádný společný prvek.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Greenova věta

Terminologie:

- $\operatorname{Int} C$... vnitřek Jordanovy křivky C.
- $\operatorname{Ext} C$... vnějšek Jordanovy křivky C.

Věta (Greenova věta)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast, $C \subseteq \Omega$ je kladně orientovaná Jordanova křivka taková, že $\operatorname{Int} C \subseteq \Omega$. Jestliže $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$ je vektorové pole třídy C^1 na Ω, potom

$$\int_{\operatorname{Int} C} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \, \mathrm{d}\lambda_2 = \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Lze ukázat, že každá Jordanova křivka má nulovou dvourozměrnou Lebesgueovu míru. Odtud

$$\int_{\overline{\operatorname{Int} C}} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \, \mathrm{d}\lambda_2 = \int_{\operatorname{Int} C} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \, \mathrm{d}\lambda_2.$$

Příklad

1. Ať $M = [0,1] \times [0,2]$ a $\boldsymbol{F}(x,y) = (xy, x + e^{\operatorname{arctg} y})$. Jestliže C je kladně orientovaná hranice M, potom
$$\int_C \boldsymbol{F}(x,y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 1.$$
2. Nechť $a, b > 0$ a M je ohraničená elipsou s parametrizací $\boldsymbol{\varphi}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom obsah M je
$$\int_M 1 = \pi ab.$$

Potenciál vektorového pole

Definice (potenciál vektorového pole)

Ať $\boldsymbol{F}$ je spojité vektorové pole definované na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Reálná funkce $f \in C^1(\Omega)$ se nazve potenciál vektorového pole $\boldsymbol{F}$ na Ω, jestliže

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x})$$

na Ω. Řekneme, že $\boldsymbol{F}$ je potenciální na Ω, jestliže má na Ω potenciál.

- Potenciál vektorového pole je zobecnění primitivní funkce známé z teorie funkcí jedné proměnné.
- Jaké jsou nutné a postačující podmínky pro existenci potenciálu?
- Je potenciál určen jednoznačně (až na aditivní konstantu)?
- Jak potenciál konstruovat, pokud existuje?
- Jaká je souvislost potenciálu s křivkovým integrálem?

Potenciál vektorového pole

Příklad (centrální vektorové pole)

Ať $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Vektorové pole

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = g(\|\boldsymbol{x}\|)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$$

se nazývá centrální. Centrální vektorové pole $\boldsymbol{F}$ má na $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ potenciál $f(\boldsymbol{x}) = G(\|\boldsymbol{x}\|)$, kde $G(t)$ je primitivní funkce k $tg(t)$ na $(0, +\infty)$.

Speciálně

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \left(\frac{Kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{Ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{Kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

kde $K \in \mathbb{R}$, má potenciál

$$f(x, y, z) = -\frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Potenciál vektorového pole

Tvrzení (nutná podmínka existence potenciálu)

Jestliže $\boldsymbol{F} = (F_1, \dots, F_n)$ *je potenciální vektorové pole třídy* C^1 *na otevřené množině* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, *potom pro každé* $i, j \in \{1, \dots, n\}$ *a pro každé* $\boldsymbol{x} \in \Omega$ *je*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Nutná podmínka existence potenciálu na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ lze formulovat ve tvaru $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ na Ω, kde

$$\nabla \times \boldsymbol{F} := \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

se nazývá rotace vektorového pole $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Potenciál vektorového pole

Příklad

Vektorové pole

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (-y, x, z)$$

není na $\mathbb{R}^3$ potenciální.

Tvrzení (o nulovosti gradientu)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je oblast a f je funkce třídy C^1 na Ω. Jestliže $\nabla f = \mathbf{0}$ na Ω, potom f je konstantní na Ω.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Důsledek (o jednoznačnosti potenciálu)

Jestliže $\boldsymbol{F}$ je spojité vektorové pole na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ a funkce f, g jsou jeho potenciály na Ω, potom $f - g$ je konstantní funkce na Ω.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Potenciál vektorového pole

Věta (Newtonova-Liebnitzova formule)

Má-li spojité vektorové pole $\boldsymbol{F}$ na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ potenciál f, potom

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})$$

pro každou orientovanou křivku C s počátečním bodem $\boldsymbol{a}$ a koncovým bodem $\boldsymbol{b}$.

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Příklad

Je dáno centrální vektorové pole $\boldsymbol{F}(x,y,z) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)$ a orientovaná křivka $C \subseteq \mathbb{R}^3$ s parametrizací $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$. Potom

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{1}{\sqrt{1+16\pi^2}} - 1.$$

Potenciál vektorového pole

Definice (nezávislost křivkového integrálu na cestě)

Ať $\boldsymbol{F}$ je spojité vektorové pole definované na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že křivkový integrál vektorového pole $\boldsymbol{F}$ nezávisí v Ω na cestě, jestliže

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

pro každé dvě orientované křivky $C_1, C_2 \subseteq \Omega$, jejichž počáteční body jsou stejné a také koncové body jsou stejné.

Potenciál vektorového pole

Věta (charakterizace potenciálního pole)

Ať $\boldsymbol{F}$ je spojité vektorové pole definované na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *$\boldsymbol{F}$ je potenciální na Ω.*
2. *Křivkový integrál vektorového pole $\boldsymbol{F}$ nezávisí v Ω na cestě.*
3. *Pro každou jednoduchou uzavřenou orientovanou křivku C ležící v Ω platí*
$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Potenciál vektorového pole

Příklad

Nechť
$$\boldsymbol{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$
Potom je splněna nutná podmínka existence potenciálu na $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (tj. $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$ pro každé $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$), ale $\boldsymbol{F}$ nemá potenciál na žádné prstencovém okolí počátku.

Věta (o existenci potenciálu)

Nechť $\boldsymbol{F} = (F_1, \dots, F_n)$ je vektorové pole třídy C^1 na otevřené konvexní množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Jestliže pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$ je
$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}),$$
potom $\boldsymbol{F}$ je potenciální.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Potenciál vektorového pole

Příklad

Je dáno vektorové pole

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left((1+xy)e^{xy}, x^2e^{xy}\right).$$

1. $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ na $\mathbb{R}^2$.
2. Potenciál f vektorového pole $\boldsymbol{F}$ splňující $f(0,0)=0$ je $f(x,y) = xe^{xy}$.
3. Jestliže orientovaná křivka C má parametrizaci $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\sin t, 2t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, potom
$$\int_C \boldsymbol{F}(x,y) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = e^{\pi}.$$