Mocninné řady

Zadání

1. Nalezněte poloměr konvergence uvedených mocninných řad.
   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} x^n$.
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{3^n} (x-5)^n$.
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$.
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n n}{n+1} x^{2n}$.
2. Vyšetřete konvergenci uvedených mocninných řad a nalezněte jejich součet.
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} x^{2n+3}$.
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+n)}{3^n n!} (x-2)^n$.
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+1)} x^{n+1}$.
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n} x^n$.
3. Nalezněte rozvoj funkce $f(x)$ do mocninné řady na okolí bodu x_0, jestliže
   (a) $f(x) = 3^x$, $x_0 = -3$;
   (b) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$, $x_0 = 0$;
   (c) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $x_0 = -1$;
   (d) $f(x) = \frac{1}{2x-5}$, $x_0 = 1$;
   (e) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$, $x_0 = 0$;
   (f) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-2x-3}$, $x_0 = 0$;
   (g) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-2x-3}$, $x_0 = 2$.

Výsledky

1. (a) $R = 1$.
   (b) $R = 0$.
   (c) $R = +\infty$.
   (d) $R = \frac{1}{2}$.

2. (a) $\frac{x^3}{5+x^2}$, $R = \sqrt{5}$.
   (b) $e^{-\frac{x-2}{3}}\left(\frac{5-x}{3}\right)$, $R = +\infty$.
   (c) $-x - 2\ln(2-x) + \ln 4$, $R = 2$.
   (d) $\operatorname{arctg}(x)$, $R = 1$.
   (e) $\frac{x}{1-x^2} - \ln(1-x)$, $R = 1$.

3. (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 3)^n}{27\cdot n!}(x+3)^n$ pro $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}n!}x^{2n+1}$ pro $x \in \mathbb{R}$.
   (c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n$ pro $|x+1| < 1$.
   (d) $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}(x-1)^n$ pro $|x-1| < \frac{3}{2}$.
   (e) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n(n+1)x^n$ pro $|x| < \frac{1}{2}$.
   (f) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{3^{n+1}} + 2(-1)^n\right]x^n$ pro $|x| < 1$.
   (g) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-1 + \frac{2(-1)^n}{3^{n+1}}\right](x-2)^n$ pro $|x| < 1$.