Limita a spojitost

Zadání

1. Rozhodněte, zda uvedené limity existují a pokud ano, tak je vypočtěte.
   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$;
   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$;
   (c) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yz+xy}{x^2+y^2+z^2}$;
   (d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}$;
   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+y^2}$;
   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.
2. Rozhodněte, zda je funkce f spojitá, jestliže
   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}, & x^2 \neq y^2, \\ 0, & x^2 = y^2; \end{cases}$
   (b) $f(x,y) = \begin{cases} xe^{\frac{x}{y}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases}$
   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$
3. Určete konstantu $k \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce f byla spojitá, jestliže
   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}-1}, & x \geq y \text{ a } y \neq x-1, \\ k, & (x,y) = (2,1); \end{cases}$
   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+x^2+y^2}-2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ k, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$
4. Určete funkci g tak, aby funkce f byla spojitá, jestliže
   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-xy^2}{x-y}, & x \neq y, \\ g(x), & x = y; \end{cases}$
   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y}, & y \neq 0, \\ g(x), & y = 0. \end{cases}$
5. Ať $f(x,y) = d(x)d(y)$, kde $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je Dirichletova funkce (tj. $d(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$ a $d(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).
   (a) Ukažte, že f není spojitá v bodě $(1,1)$;
   (b) Ukažte, že $f\restriction_{\mathbb{Q}^2}$ je spojitá v bodě $(1,1)$.

Výsledky

1. (a) neexistuje;
   (b) 0;
   (c) neexistuje;
   (d) 0;
   (e) 0;
   (f) 2.
2. (a) není (v bodě $(0, 0)$ limita neexistuje);
   (b) není (v bodě $(0, 0)$ limita neexistuje);
   (c) je.
3. (a) 2;
   (b) $\frac{1}{4}$.
4. (a) x^2;
   (b) x.