

Diferenciál

Zadání

1. Je dána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ukažte, že $\nabla_{\mathbf{v}} f(0, 0) = 0$ pro všechna $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ (tj. směrová derivace je dána lineárním zobrazením), ale f není v $(0, 0)$ spojitá (a odtud nemá v $(0, 0)$ diferenciál).

2. Nalezněte diferenciál funkce $f(x, y) = x^2 - 2y^3$ v bodě $\mathbf{a} = (2, 1)$. Dále určete $\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$, jestliže $\mathbf{v} = (3, 2)$.

3. Je dána funkce $f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y$. Nalezněte všechny jednotkové vektory \mathbf{v} tak, aby

(a) $\nabla_{\mathbf{v}} f(1, 1) = -1$;

(b) $\nabla_{\mathbf{v}} f(1, 1) = \sqrt{2}$.

4. Je dána funkce $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Nalezněte všechny jednotkové vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tak, aby

(a) \mathbf{v} udával směr největšího růstu funkce f v bodě $(1, 2)$;

(b) \mathbf{v} udával směr největšího poklesu funkce f v bodě $(1, 2)$;

(c) $\nabla_{\mathbf{v}} f(1, 2) = 0$.

5. Je dána funkce $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)^{xy}$. Nalezněte všechny jednotkové vektory $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tak, aby

(a) \mathbf{v} udával směr největšího růstu funkce f v bodě $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$;

(b) \mathbf{v} udával směr největšího poklesu funkce f v bodě $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

6. Nalezněte Jacobiho matici a diferenciál vektorové funkce \mathbf{f} v bodě \mathbf{a} , jestliže

(a) $\mathbf{f}(x, y, z) = (xyz, x^2z)$, $\mathbf{a} = (1, -2, 1)$;

(b) $\mathbf{f}(x, y) = (ye^x, x^3 - y, 2x + 1)$, $\mathbf{a} = (0, 1)$.

7. Určete Jacobiho matici vektorové funkce $\mathbf{f}(x, y) = (x+y, x^2y)$ v obecném bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a určete, v kterých bodech má tato matice nulový determinant.

8. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě \mathbf{a} , jestliže

(a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 5y$, $\mathbf{a} = (1, 2, -4)$;

(b) $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$, $\mathbf{a} = (1, 1, \frac{\pi}{4})$;

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{a} = (3, 4, 5)$.

9. Nalezněte všechny body v grafu funkce f , ve kterých je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $z = 0$, jestliže
- (a) $f(x, y) = x^2y + xy^2 - x$;
 (b) $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
10. Pomocí diferenciálu nalezněte přibližně hodnotu $1,02^{3,01}$.
11. Dva rezistory o odporech $R_1 = 10 \Omega$ a $R_2 = 15 \Omega$ jsou zapojeny paralelně. Využijte diferenciál k aproximaci celkového odporu paralelního zapojení těchto rezistorů, jestliže z důvodů teploty odpor R_1 vzrostl o $\frac{1}{5} \Omega$ a R_2 o $\frac{4}{5} \Omega$.
12. Pomocí diferenciálu nalezněte aproximaci délky uhlopříčky v obdélníku, jehož strany mají délky 30, 3 cm a 39, 9 cm.
13. Předpokládejte, že $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ jsou diferencovatelné, $\mathbf{g}(0) = (1, 3)$, $\mathbf{g}'(0) = (-2, 2)$ a $\nabla f(1, 3) = (5, -2)$. Nalezněte $h'(0)$, kde $h(t) = f(\mathbf{g}(t))$.
14. Je dána diferencovatelná funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $h(u, v) = f(\mathbf{g}(u, v))$. Vypočtěte
- (a) $\frac{\partial h}{\partial u}(0, 0)$ a $\frac{\partial h}{\partial v}(0, 0)$, víte-li, že $\mathbf{g}(u, v) = (e^u + \sin v, e^u + \cos v)$ a $\nabla f(1, 2) = (2, -3)$;
 (b) $\frac{\partial h}{\partial u}(1, -1)$ a $\frac{\partial h}{\partial v}(1, -1)$, víte-li, že $\mathbf{g}(u, v) = (u^2 + 2uv^2 - v^3, v^2 - 3u)$ a $\nabla f(4, -2) = (2, 1)$;
 (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)$, víte-li, že $\mathbf{g}(u, v) = (u + u \ln v, \frac{u+v}{u-1})$ a $\nabla h(2, 1) = (3, 1)$.
15. Pomocí věty o derivaci složeného zobrazení vypočtěte $g'(t)$, jestliže $g(t)$ vznikne z $f(x, y) = \frac{x-y}{x+2y}$ tak, že položíme $x = e^t$ a $y = e^{-t}$.
16. Pomocí věty o derivaci složeného zobrazení vypočtěte $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ a $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$, jestliže $g(u, v)$ vznikne z $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ tak, že položíme $x = u \sin v$, $y = u \cos v$ a $z = u^2v$.
17. Ukažte, že je-li $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě diferencovatelná funkce, pak $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$ vyhovuje rovnici $y \frac{\partial g}{\partial x} - x \frac{\partial g}{\partial y} = 0$.
18. Ať funkce $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitě všechny parciální derivace do druhého řádu včetně a $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce, jejíž druhá derivace \mathbf{x}'' je spojitá. Prvních n proměnných funkce L označme u_1, \dots, u_n a zbylých n proměnných pak v_1, \dots, v_n . Předpokládejte, že

$$\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)) \right)' - \frac{\partial L}{\partial u_i}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)) = 0$$

pro každé $i = 1, \dots, n$. Ukažte, že funkce

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v_i}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)) x'_i(t) - L(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))$$

je konstantní.

Výsledky

2. $df(\mathbf{a})(h, k) = 4h - 6k, \nabla_v f(\mathbf{a}) = 0$.
3. (a) $(1, 0), (0, -1)$;
(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)$.
4. (a) $\frac{1}{5}(3, -4)$;
(b) $\frac{1}{5}(-3, 4)$;
(c) $\frac{1}{5}(3, 4), -\frac{1}{5}(3, 4)$.
5. (a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$;
(b) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$.
6. (a) $\mathbf{J}_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d\mathbf{f}(\mathbf{a})(h, k, l) = (-2h + k - 2l, 2h + l)$;
(b) $\mathbf{J}_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, d\mathbf{f}(\mathbf{a})(h, k) = (h + k, -k, 2h)$.
7. $\mathbf{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$ a $\det \mathbf{J}_f(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$ nebo $x = 2y$.
8. (a) $z = 4x - y - 6$;
(b) $z = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}$;
(c) $z = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$.
9. (a) $(0, -1, 0)$ a $(0, 1, 0)$;
(b) $(1, 1, 3)$.
10. $1,02^{3,01} \approx 1,06$.
11. Přibližně $6,2\Omega$.
12. Přibližně $50,1\text{ cm}$.
13. -14 .
14. (a) $\frac{\partial h}{\partial u}(0, 0) = -1$ a $\frac{\partial h}{\partial v}(0, 0) = 2$;
(b) $\frac{\partial h}{\partial u}(1, -1) = 5$ a $\frac{\partial h}{\partial v}(1, -1) = -16$;
(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 1$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = -1$.
15. $g'(t) = \frac{6}{(e^t + 2e^{-t})^2}$.
16. $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 2u(1 + 2u^2v^2), \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 2u^4v$;