Funkce třídy C^k

Zadání

1. Nalezněte Taylorův rozvoj druhého řádu funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$, jestliže
   (a) $f(x,y) = x^2 + xy - y$, $\boldsymbol{a} = (1,2)$;
   (b) $f(x,y) = xe^{\sin y}$, $\boldsymbol{a} = (-1,0)$;
   (c) $f(x,y,z) = xyz$, $\boldsymbol{a} = (1,1,2)$.
2. Nalezněte jednotkový normálový vektor k ploše o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v bodě
   (a) $(1,0,0)$;
   (b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
3. Nalezněte rovnici tečné roviny k ploše $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ v bodě $(4,3,4)$.
4. Nalezněte úhel sevřený dvěma plochami v bodě $\boldsymbol{a}$, jestliže
   (a) plochy jsou zadány rovnicemi $2x^2+y^2+z^2 = 1$, $x^2+y^2+z^2-2x+4y+3 = 0$ a $\boldsymbol{a} = (0,-1,0)$;
   (b) plochy jsou zadány rovnicemi $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ a $\boldsymbol{a} = (1,0,0)$.
5. Nalezněte všechny body na elipsoidu $3x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, ve kterých je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $-12x + 2y + 6z = 0$.
6. Nalezněte všechny body na ploše $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$, ve kterých je tečná rovina rovnoběžná s některou ze souřadnicových rovin.
7. Ať $f(x,y,z)$ je třídy C^1. Vyjádřete $\frac{\partial f}{\partial x}$ ve sférických souřadnicích (tj. $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$).
8. Uvedené rovnice přepište do nových proměnných:
   (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$, $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$;
   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$;
   (c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$, $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$;
9. Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $\varphi \in C^2(\Omega)$ a $\boldsymbol{F} \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$
$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

   Ukažte, že

(a) $\nabla \times \nabla \varphi = 0$;

(b) $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{F} = 0$;

(c) $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \Delta \boldsymbol{F}$.

10. Ať $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{A}$ je reálná matice 3×3 a $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Co musí splňovat matice $\boldsymbol{A}$, aby

    (a) $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$;

    (b) $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$.

Výsledky

1. Nalezněte Taylorův rozvoj druhého řádu funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$, jestliže

   (a) $1+4(x-1)+(x-1)^2+(x-1)(y-2)$;

   (b) $-1+(x+1)-y+(x+1)y-\frac{y^2}{2}$;

   (c) $2+2(x-1)+2(y-1)+(z-2)+2(x-1)(y-1)+(x-1)(z-2)+(y-1)(z-2)$.

2. (a) $(1,0,0)$;

   (b) $\frac{1}{2}(\sqrt{2},1,1)$.

3. $\frac{1}{2}(x-4)+\frac{2}{3}(y-3)-(z-4)=0$.

4. (a) $\varphi=\frac{\pi}{4}$;

   (b) $\varphi=0$.

5. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$ a $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

6. $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(1,1,0)$ a $(1,-1,0)$.

7. $$\frac{\partial f}{\partial x}=\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\varphi},$$

   kde $g(r,\theta,\varphi)=f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$.

8. (a) $\frac{\partial g}{\partial v}=0$, kde $g(u,v)=f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)$;

   (b) $$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}=0,$$

   kde $g(r,\varphi)=f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$;

   (c) $$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}=0,$$

   kde $g(r,\theta,\varphi)=f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$.

10. (a) $\operatorname{Tr}\boldsymbol{A}=a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$;

    (b) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$.