Extrémy funkcí

Zadání

1. Klasifikujte všechny stacionární body funkce f, jestliže
   (a) $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$;
   (b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$;
   (c) $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;
   (d) $f(x, y) = y \cos x$;
   (e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;
   (f) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, kde $x, y, z > 0$;
2. Rozhodněte, zda je funkce f konvexní, jestliže
   (a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3xy$;
   (b) $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 + xy + yz$.
3. Je dána funkce $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 - x$.
   (a) Nalezněte největší otevřenou množinu C, na které je f konvexní.
   (b) Klasifikujte stacionární body funkce f.
   (c) Je bod $(1, 0)$ bodem extrému funkce f na C, kde C je množina z bodu (a)? Pokud ano, jakým?
4. Je dána funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + \alpha xy + y$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Určete všechny hodnoty parametru α tak, aby funkce f byla konvexní.
   (b) Pro každou hodnotu parametru α z předchozího bodu nalezněte všechny body minima funkce f.
5. Metodou nejmenších čtverců proložte body $(-1, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 3)$, $(0, 2)$ a $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ graf funkce
   (a) $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.
   (b) $f(x) = a \sin(\pi x) + b \cos(\pi x)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.
6. Metodou nejmenších čtverců proložte body $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ a $(2, 5)$ graf funkce$f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
7. Nalezněte všechny body v rovině $x + y + z = 1$, které jsou nejblíže bodu $(2, 0, -3)$.
8. Nalezněte všechny body na povrchu kuželu $z^2 = x^2 + y^2$, které jsou nejblíže bodu $(4, 2, 0)$.
9. Nalezněte body minima a maxima funkce f na množině M, jestliže
   (a) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(b) $f(x,y) = xy^2$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 3\}$;

(c) $f(x,y) = x^2+y^2-2x$, M je trojúhelník s vrcholy $(2,0),(0,2),(0,-2)$;

10. Nalezněte rozměry kvádru o největším objemu, který leží v prvním oktantu, má tři stěny v rovinách $x=0$, $y=0$, $z=0$ a jeden vrchol má v rovině $x+2y+3z=6$.

11. Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů nalezněte extrémy funkce f na množině M, jestliže

    (a) $f(x,y) = e^{-xy}$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2 \leq 1\}$;

    (b) $f(x,y,z) = x+y+z$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

12. Mezi body množiny

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 4\right\}$$

nalezněte všechny, které jsou nejblíže (resp. nejdále) od bodu $\boldsymbol{a} = (3,1,-1)$ a určete jejich vzdálenosti od $\boldsymbol{a}$.

13. Nalezněte nejvyšší bod (tj. bod s největší třetí souřadnicí) na křivce, která je průnikem ploch o rovnicích $x^2+y^2-z^2=0$ a $x+2z=4$.

14. Nalezněte tři nezáporná čísla, jejichž součet je 300 a součin je maximální.

15. Nalezněte vzdálenost paraboly $y=x^2$ od přímky $x-y-1=0$.

Výsledky

1. (a) $(0,1)$, $(-1,-1)$ a $(1,-1)$ jsou sedlové body; $(-1,1)$ a $(1,1)$ jsou body ostrého lokálního minima; $(0,-1)$ je bod lokálního maxima.
   (b) $(0,0)$ je bod lokálního maxima; každý prvek v $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ je bodem lokálního minima (dokonce bodem minima).
   (c) Funkce nemá stacionární body. (Ale bod $(0,0)$ je bod maxima funkce f.)
   (d) Pro každé $k\in\mathbb{Z}$ je $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right)$ sedlový bod.
   (e) $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ je bod lokálního minima.
   (f) $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ je bod lokálního minima.
2. (a) Není konvexní.
   (b) Je konvexní.
3. (a) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$.
   (b) $(1,0)$ je bod lokálního minima a $(-1,0)$ je sedlový bod.
   (c) Jedná se o bod minima funkce f na C.
4. (a) f je konvexní pro $\alpha\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$.
   (b) Pro každé $\alpha\in(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$ má f jediný bod minima, a to $\left(\frac{\alpha}{8-\alpha^2},\frac{-2}{8-\alpha^2}\right)$. Pro $\alpha=\pm 2\sqrt{2}$ bod minima neexistuje.
5. (a) $a=\frac{2}{5}, b=\frac{8}{5}$.
   (b) $a=-1, b=1$.
6. $a=\frac{3}{7}, b=\frac{6}{5}, c=\frac{26}{35}$.
7. $\left(\frac{8}{3},\frac{2}{3},-\frac{7}{3}\right)$.
8. $\left(2,1,\sqrt{5}\right)$, $\left(2,1,-\sqrt{5}\right)$.
9. (a) $(-1,0)$ je bod minima a $(1,0)$ je bod maxima.
   (b) $(1,\sqrt{2})$ je bod maxima a všechny prvky množiny
   $$\left\{(x,0)\,\middle|\,0\le x\le\sqrt{3}\right\}\cup\left\{(0,y)\,\middle|\,0\le y\le\sqrt{3}\right\}$$
   jsou body minima.
   (c) $(1,0)$ je bod minima; $(0,-2)$ a $(0,2)$ jsou body maxima.
10. $\left(2,1,\frac{2}{3}\right)$.
11. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ jsou body minima; $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ jsou body maxima.
    (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$ je bod minima a $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ je bod maxima.

12. Nejblíže je bod $(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}})$, jehož vzdálenost od a je $\sqrt{15 - \frac{44}{\sqrt{11}}} = \sqrt{11} - 2$. Nejdále je bod $(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}})$, jehož vzdálenost od a je $\sqrt{15 + \frac{44}{\sqrt{11}}} = \sqrt{11} + 2$.

13. $(-4, 0, 4)$.

14. $x = y = z = 100$.

15. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.