

Lebesgueův integrál

Zadání

1. Zaměňte pořadí integrace v následujících dvojnásobných integrálech:

(a) $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) \, dy \, dx;$

(b) $\int_{-1}^2 \int_0^{e^{-x}} f(x, y) \, dy \, dx.$

2. Záměnou pořadí integrace vypočtete

(a) $\int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2} \, dy \, dx;$

(b) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos \sqrt{x^3} \, dx \, dy.$

3. Vypočtete $\int_M f$, jestliže

(a) $f(x, y) = |y - \sin x|$, $M = [0, \pi] \times [0, 1];$

(b) $f(x, y) = x \cos y$ a M je ohraničená křivkami $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$;

(c) $f(x, y) = e^{-x-y}$, $M = (0, +\infty)^2;$

(d) $f(x, y, z) = e^{\frac{z}{y}}$ a $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq xy\};$

(e) $f(x, y, z) = y$ a M je množina v prvním oktantu ohraničená rovinami $x + y = 1$ a $y + z = 1$;

(f) $f(x, y, z) = y$ a M je ohraničeno paraboloidem $y = 4x^2 + 4z^2$ a rovinou $y = 4$.

4. Zaměňte pořadí integrace v dvojnásobném integrálu

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Kromě toho vyjádřete I v polárních souřadnicích se středem v počátku (v obou pořadích).

5. Zaměňte pořadí integrace v součtu

$$I = \int_0^1 \int_{-x^2}^0 f(x, y) \, dy \, dx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x, y) \, dy \, dx.$$

Kromě toho vyjádřete I v polárních souřadnicích se středem v počátku, kde vnitřní integrace bude podle proměnné r .

6. Vhodnou substitucí vypočtete $\int_M f$, jestliže

(a) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2}$ a M je ohraničena křivkami $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ a $x = 3y^2$; (Nápověda: $u = \frac{y}{x^2}$ a $v = \frac{x}{y^2}$.)

(b) $f(x, y) = (x + y) \cos(\pi(x - y))$ a M je ohraničena křivkami $x + y = 0$, $x = 1$ a $x = 1 + y$; (Nápověda: $u = x + y$ a $v = x - y$.)

- (c) $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ a $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, kde $a, b > 0$;
- (d) $f(x, y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ a $M = \mathbb{R}^2$;
- (e) $f(x, y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$ a $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1, x \geq |y|\}$;
- (f) $f(x, y, z) = z$ a M je ohraničená plochami $z = x^2 + y^2$ a $z = 4$;
- (g) $f(x, y, z) = xe^{x^2+y^2+z^2}$ a M je průnik prvního oktantu s koulí, jejíž střed je v počátku a poloměr je 1;
7. Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami
- (a) $y = \sin x$ a $y = \cos x$, kde $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$;
- (b) $2x - 3y = 0$, $x + y = 5$ a $y = 0$;
- (c) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2$, $x = y - \frac{y^3}{4}$, $x = -2$ a $y = -2$.
8. Nalezněte hmotný střed homogenní rovinné desky M ohraničené křivkami $y = x^2$ a $x + y = 2$.
9. Nalezněte objem množiny M , jestliže
- (a) M je ohraničená plochami $y = x^2 + z^2$ a $y = 8 - x^2 - z^2$;
- (b) M je ohraničená plochami $y = x^2$, $z = 0$ a $y + z = 1$.
10. Nalezněte hmotný střed tělesa M , jestliže
- (a) M je ohraničené plochami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ a hustota je $\rho(x, y, z) = y$;
- (b) M je průnik koule o středu 0 a poloměru $R > 0$ s poloprostorem $z \geq 0$ a hustota je $\rho(x, y, z) = k > 0$.
11. Uvažme těleso $M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 \right\}$ s hustotou $\rho(x, y, z) = z$. Nalezněte $a > 0$ tak, aby rovina $z = a$ rozdělila těleso M na dvě stejně těžké části.
12. Nalezněte moment setrvačnosti homogenního tělesa M o hmotnosti m vzhledem k ose p , jestliže
- (a) p je osa x a $M = [0, 4] \times [0, 2] \times [0, 1]$;
- (b) p je osa z a $M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h \right\}$, kde $h > 0$;
- (c) p je osa z a $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$, kde $a, h > 0$;
- (d) p je osa z a $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$, kde $a > 0$.

Výsledky

1. (a) $\int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x, y) \, dx \, dy;$
(b) $\int_0^{e^{-2}} \int_{-1}^2 f(x, y) \, dx \, dy + \int_{e^{-2}}^e \int_{-1}^{-\ln y} f(x, y) \, dx \, dy.$

2. (a) $e^4 - 1;$

(b) $\frac{2}{3} \sin 8.$

3. (a) $\pi - 2;$

(b) $\frac{1}{2} (1 - \cos 1);$

(c) $1;$

(d) $\frac{e}{2} - \frac{7}{6};$

(e) $\frac{1}{12};$

(f) $\frac{16}{3} \pi.$

4.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^1 f(x, y) \, dy \, dx + \int_{2\sqrt{2}}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}}} \int_0^3 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi + \int_{\operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \, dr + \int_1^3 \int_0^{\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, d\varphi \, dr. \end{aligned}$$

5.

$$I = \int_{-1}^0 \int_{\sqrt{-y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \int_{-\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}}^{2 \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi.$$

6. (a) $\frac{2}{3};$

(b) $-\frac{1}{2\pi^2};$

(c) $\frac{2}{3} \pi ab$

(d) $2\pi.$

(e) $\sqrt{2}.$

(f) $\frac{64}{3} \pi;$

(g) $\frac{\pi}{8};$

7. (a) $2\sqrt{2};$

(b) $5;$

(c) $\frac{16}{3}.$

8. $(-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}).$

9. (a) 16π ;
(b) $\frac{8}{15}$.
10. (a) $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$;
(b) $(0, 0, \frac{3}{8}R)$.
11. $a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
12. (a) $I_x = \frac{5}{3}m$;
(b) $I_z = \frac{3mh^2}{10}$;
(c) $I_z = \frac{ma^2}{2}$;
(d) $I_z = \frac{2ma^2}{5}$.