

Matematická analýza 2

Písemná část zkoušky (01.09.2025, od 11:00)

Jméno:

Podpis:

Příklad	1.	2.	3.	4.	5.	Σ
Body						

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno“ a podepište se.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- Na konci každého příkladu formulujte odpověď.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Jakobián transformace do polárních souřadnic: r .
- Jakobián transformace do válcových souřadnic: r .
- Jakobián transformace do sférických souřadnic: $r^2 \sin \theta$.

Zadání

1. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(x, y) = x^2 + y \ln(x + 2y).$$

- (a) Určete jednotkový vektor $\mathbf{v}$ udávající směr největšího růstu funkce f v bodě $(-1, 1)$.
(b) Nalezněte všechny jednotkové vektory $\mathbf{h}$ tak, aby $\nabla_{\mathbf{h}} f(-1, 1) = 0$.

2. [10 bodů] Klasifikujte všechny stacionární body funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{3}y^3 + z^2 - 2xy - 3x + 2z$$

3. [10 bodů] Vypočtěte křivkový integrál funkce $f(x, y) = x - xy$ podél křivky

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2, x \geq 1\}.$$

4. [10 bodů] Ať plocha S je hranice množiny

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 1, x + 2y - 4 \leq 0\}$$

orientovaná vnějším normálovým polem. Pomocí Gaussovy věty nalezněte tok vektorového pole

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{yz} - xyz, y^2 z + \arctg x, yz^2)$$

orientovanou plochou S .

5. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(x) = \frac{1}{2-x}.$$

- (a) Nalezněte rozvoj funkce $f(x)$ do mocninné řady se středem v bodě 3 a určete její poloměr konvergence.
(b) Nalezněte rozvoj funkce $f'(x)$ do mocninné řady se středem v bodě 3 a určete její poloměr konvergence.