

Matematická analýza 2

Písemná část zkoušky (01.09.2025, od 13:00)

Jméno:

Podpis:

Příklad	1.	2.	3.	4.	5.	Σ
Body						

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno“ a podepište se.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- Na konci každého příkladu formulujte odpověď.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Jakobián transformace do polárních souřadnic: r .
- Jakobián transformace do válcových souřadnic: r .
- Jakobián transformace do sférických souřadnic: $r^2 \sin \theta$.

Zadání

1. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(x, y) = x \sin(y^2 - x) + \frac{x}{y}.$$

Nalezněte všechny jednotkové vektory $\mathbf{h}$ tak, aby $\nabla_{\mathbf{h}} f(-1, 1) = 0$.

2. [10 bodů] Nalezněte všechny body minima a maxima funkce

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 3x$$

na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 9\}$.

3. [10 bodů] Vypočtěte integrál funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ přes množinu

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \leq 4(x^2 + y^2) \leq 16, z \geq 0\}.$$

4. [10 bodů] Je dána kompaktní množina M ohraničená křivkami $y - x = 0$, $y = 0$ a $2y + x = 3$. Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál vektorového pole

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2, xy + \sin(y^2))$$

podél kladně orientované křivky, která je hranicí množiny M .

5. [10 bodů]

(a) Nalezněte poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} (x+1)^{2k}$$

a rozhodněte, zda řada konverguje v bodě 2.

(b) Na intervalu konvergence nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+2)(-1)^k}{k!} x^{k+1}.$$