

1. semestrální test (varianta A)

Jméno a příjmení:

Odpovědi zdůvodněte!

1. [5 bodů] Je dána funkce

$$f(x, y) = x \sin(\pi y) - \ln x.$$

- (a) Určete jednotkový vektor udávající směr největšího růstu funkce f v bodě $(1, 2)$.
(b) Nalezněte Taylorův polynom prvního řádu funkce f v bodě $(1, 2)$.
2. [5 bodů] Na křivce o rovnici

$$x^2 + 2xy + 5y^2 = 1$$

nalezněte nejnižší bod (tj. bod s nejmenší druhou souřadnicí).

1. semestrální test (varianta B)

Jméno a příjmení:

Odpovědi zdůvodněte!

1. [5 bodů] Je dána funkce

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1).$$

- (a) Nalezněte definiční obor funkce f a hladinu funkce f výšky 0, kterou načrtněte.
(b) Ať $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ je třídy C^1 , $\varphi(3) = (-1, 1)$, $\varphi'(3) = (1, 3)$ a $g(t) = f(\varphi(t))$. Pomocí řetízkového pravidla vypočtete $g'(3)$.
2. [5 bodů] Nalezněte a klasifikujte všechny stacionární body funkce

$$f(x, y) = x^4 - 2xy + y^2.$$

2. semestrální test (varianta A)

Jméno a příjmení:

Odpovědi zdůvodněte!

1. [5 bodů] Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx.$$

pomocí vyjádření v polárních souřadnicích tak, aby vnitřní integrace byla přes proměnnou r .

2. [5 bodů] Vypočtěte křivkový integrál funkce

$$f(x, y) = x - 2y^2$$

podél úsečky C s krajními body $(2, 0)$ a $(0, 1)$.

2. semestrální test (varianta B)

Jméno a příjmení:

Odpovědi zdůvodněte!

1. [5 bodů] Záměnou pořadí integrace vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}-2}^{-1} \frac{x}{(x+2)^2} dx dy.$$

2. [5 bodů] Vypočtěte křivkový integrál vektorového pole

$$\mathbf{F}(x, y) = (-xy, x^2)$$

podél křivky C , která je průnikem kružnice $\|(x, y)\| = 2$ s prvním kvadrantem, její počáteční bod je $(2, 0)$ a koncový bod je $(0, 2)$.

Stručná řešení

1. semestrální test (varianta A)

1. (a) Jednotkový směr největšího růstu je vektor

$$\frac{\nabla f(1, 2)}{\|\nabla f(1, 2)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{1 + \pi^2}} \right).$$

- (b) Taylorův polynom prvního řádu funkce f v bodě $(1, 2)$ je

$$T(x, y) = f(1, 2) + \nabla f(1, 2) \cdot (x - 1, y - 2) = -(x - 1) + \pi(y - 2).$$

2. Hledáme bod minima funkce $f(x, y) = y$ na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2xy + 5y^2 = 1\}.$$

(Existence takového bodu plyne z Weierstrassovy věty.) Z věty o Lagrangeových multiplikátorech obdržíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\lambda(2x + 2y) &= 0, \\ 1 + \lambda(2x + 10y) &= 0, \\ x^2 + 2xy + 5y^2 &= 1.\end{aligned}$$

Z první rovnice vidíme, že $\lambda = 0$ nebo $x = -y$. Možnost $\lambda = 0$ musíme vyloučit, protože vede ke sporu s druhou rovnicí. Ze vztahu $x = -y$ a třetí rovnice dostaneme $x^2 = \frac{1}{4}$. Tedy $x = \pm \frac{1}{2}$ a $y = -x = \mp \frac{1}{2}$. Odtud plyne, že bod v M , který má nejmenší druhou souřadnici, je $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

1. semestrální test (varianta B)

1. (a) Definiční obor D funkce f je vnějšek kružnice se středem v počátku a poloměrem 1, tj.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}.$$

Z rovnosti $f(x, y) = 0$ dostaneme $x^2 + y^2 = 2$. Tedy hladina funkce f výšky 0 je kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{2}$, tj.

$$\text{lev}(f; 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\}.$$

- (b) Z řetízkového pravidla plyne, že

$$g'(3) = \nabla f(-1, 1) \cdot \varphi'(3) = (-2, 2) \cdot (1, 3) = 4.$$

2. Gradient funkce f je nulový právě tehdy, když

$$\begin{aligned}4x^3 - 2y &= 0, \\ -2x + 2y &= 0.\end{aligned}$$

Z druhé rovnice máme $x = y$. Dosazením do první rovnice dostaneme

$$2x(2x^2 - 1) = 0.$$

Odtud vidíme, že $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ jsou stacionární body funkce f . Hessova matice funkce f v bodě (x, y) je

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

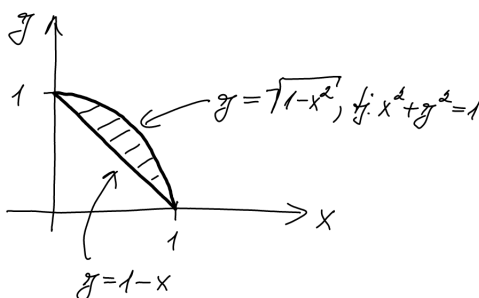
je indefinitní matice, a proto je $(0, 0)$ sedlový bod funkce f . Dále

$$H_f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H_f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní matice, a proto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ jsou body lokálního minima funkce f .

2. semestrální test (varianta A)

1. Dvojnásobný integrál odpovídá integrálu přes množinu znázorněnou na Obrázku 1.



Obrázek 1: Znázornění integračního oboru.

Nyní musíme popsat danou množinu pomocí polárních souřadnic. Z obrázku vidíme, že $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Horní mez polární souřadnice r je 1 nezávisle na φ . Dosadíme-li vztahy $x = r \cos \varphi$ a $y = r \sin \varphi$ mezi kartézskými a polárními souřadnicemi do rovnice $y = 1 - x$, pak po úpravě obdržíme

$$r = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi},$$

což je vyjádření dolní meze souřadnice r v závislosti na $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Proto

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}}^1 \frac{r(\cos \varphi + \sin \varphi)}{r^2} r dr d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi + \sin \varphi - 1 d\varphi = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Parametrizace křivky C je například

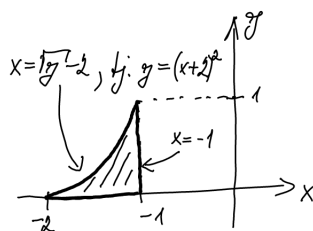
$$\varphi(t) = (2(1-t), t), \quad t \in [0, 1].$$

Proto

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_0^1 (2(1-t) - 2t^2) \sqrt{5} \, dt = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

2. semestrální test (varianta B)

1. Dvojnásobný integrál odpovídá integrálu přes množinu načrtnutou na Obrázku 2.



Obrázek 2: Znázornění integračního oboru.

Z obrázku plyne, že

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}-2}^{-1} \frac{x}{(x+2)^2} \, dx \, dy = \int_{-2}^{-1} \int_0^{(x+2)^2} \frac{x}{(x+2)^2} \, dy \, dx = \int_{-2}^{-1} x \, dx = -\frac{3}{2}.$$

2. Parametrizace křivky C odpovídající zadané orientaci je například

$$\varphi(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Proto

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-4 \sin t \cos t, 4 \cos^2 t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) \, dt \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 8. \end{aligned}$$