

Matematická analýza 2

Úvod

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Stránky předmětu:

<https://moodle.fel.cvut.cz/courses/B0B01MA2>

Obsah kurzu:

- 1 diferenciální počet;
- 2 integrální počet;
- 3 posloupnosti a řady funkcí.

Euklidovský prostor

Ať $n \in \mathbb{N}$. Označme

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ pro každé } i = 1, \dots, n\}.$$

Pro každé $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme

(O1) sčítání: $\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$;

(O2) násobení číslem: $\alpha \mathbf{x} := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$;

(O3) skalární součin: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Definice (n-dimenzionální euklidovský prostor)

Množina $\mathbb{R}^n$ vybavená operacemi (O1)–(O3) se nazývá (n-dimenzionální) euklidovský prostor.

Euklidovský prostor

Terminologie a značení:

- Místo $\mathbb{R}^1$ budeme psát $\mathbb{R}$.
- Prvky euklidovského prostoru nazýváme **body** nebo také **vektory**.
- Reálná čísla $x_1, \dots, x_n$ nazýváme **složky** (případně **souřadnice** či **komponenty**) vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
- Mezi řádkovým a sloupcovým zápisem vektorů v $\mathbb{R}^n$ nebudeme dělat rozdíl. Sloupcový však budeme využívat jen při zápisech s maticovým násobením.

Definice (euklidovská norma)

Euklidovská norma (případně **velikost**) vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je číslo

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Vlastnosti euklidovské normy

- $\forall \mathbb{R}$ je $\|x\| = |x|$.

Tvrzení (základní vlastnosti)

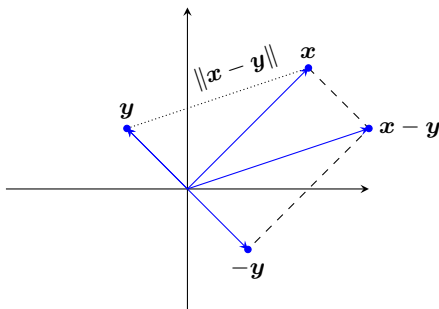
Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

- 1 $\|x\| \geq 0$ a navíc $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$;
- 2 $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- 3 $|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$; (*Cauchyho-Schwarzova nerovnost*)
- 4 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (*Trojúhelníková nerovnost*)

Důkaz: Vynecháváme. ■

Vzdálenost dvou bodů

Euklidovská vzdálenost bodů $x, y \in \mathbb{R}^n$ je číslo $\|x - y\|$.



Vlastnosti (euklidovské) vzdálenosti dvou bodů:

- ① $\|x - y\| \geq 0$ a navíc $\|x - y\| = 0$ právě tehdy, když $x = y$;
- ② $\|x - y\| = \|y - x\|$;
- ③ $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$.

Úhel mezi vektory

Úhel mezi nenulovými vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ je číslo $\varphi \in [0, \pi]$ splňující

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

- Díky Cauchyho-Schwarzově nerovnosti je úhel dobře definovaný.
- Pomocí skalárního součinu má smysl definovat kolmost dvou vektorů i v případě, kdy některý z vektorů je nulový.

Definice (kolmost vektorů)

Řekneme, že dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ jsou na sebe **kolmé** (píšeme $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$), jestliže $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

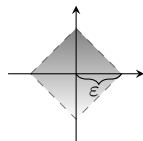
- $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$ právě tehdy, když $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Příklad

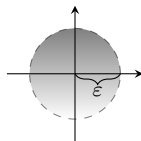
Ať $\mathbf{x} = (3, 4)$ a $\mathbf{y} = (-1, 7)$. Potom $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 5$. Úhel mezi vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ je $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dále $\mathbf{x} \perp \mathbf{v}$ právě tehdy, když $\mathbf{v} = t(-4, 3)$, kde $t \in \mathbb{R}$.

Další normy na $\mathbb{R}^n$

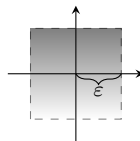
- **Součtová norma:** $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
- **Maximová norma:** $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.
- Není těžké ukázat, že se jedná o normy na lineárním prostoru $\mathbb{R}^n$.



$$\|\mathbf{x}\|_1 < \varepsilon$$



$$\|\mathbf{x}\| < \varepsilon$$



$$\|\mathbf{x}\|_\infty < \varepsilon$$

Tvrzení (nerovnosti mezi normami)

Pro každé $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

- 1 $|x_i| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty$ pro každé $i = 1, \dots, n$;
- 2 $\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|$.

Důkaz: Viz přednáška.



Posloupnost v $\mathbb{R}^n$ a její limita

- **Posloupnost (bodů) v $M \subseteq \mathbb{R}^n$** ... $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$, kde $\mathbf{x}_k \in M$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.
- Pro všechny posloupnosti $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{+\infty}, (\mathbf{y}_k)_{k=1}^{+\infty}$ v $\mathbb{R}^n$ a pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{+\infty} + (\mathbf{y}_k)_{k=1}^{+\infty} &:= (\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k)_{k=1}^{+\infty}, \\ \alpha (\mathbf{x}_k)_{k=1}^{+\infty} &:= (\alpha \mathbf{x}_k)_{k=1}^{+\infty}.\end{aligned}$$

Definice (limita posloupnosti)

Nechť $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost bodů v $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\mathbf{x}$ je **limita posloupnosti** $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ (případně **$(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ konverguje k $\mathbf{x}$**) a píšeme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ (nebo $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$ pro $k \rightarrow +\infty$), jestliže

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = 0.$$

Limita posloupnosti

Terminologie:

- $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$ je **konvergentní posloupnost** ... $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$ konverguje k nějakému $x \in \mathbb{R}^n$.
- $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$ je **divergentní posloupnost** ... $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$ není konvergentní.

Tvrzení (jednoznačnost limity posloupnosti)

Každá posloupnost bodů v $\mathbb{R}^n$ má nejvýše jednu limitu.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Tvrzení (konvergence posloupnosti po složkách)

Nechť $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost bodů v $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$ a $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$. Pak $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = L$ právě tehdy, když $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{kj} = L_j$ pro každé $j = 1, \dots, n$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Limita posloupnosti

Příklad

- 1 Posloupnost $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$, kde $x_k = (1, (-1)^k)$, je divergentní.
- 2 Posloupnost $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$, kde $x_k = \left(\frac{2k+1}{1-k}, \sqrt[k]{k}\right)$, je konvergentní a
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = (-2, 1).$$

Tvrzení (základní pravidla o limitách posloupností)

Je-li $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = y$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom

- 1 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha x_k = \alpha x$;
- 2 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k + y_k = x + y$;
- 3 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k \cdot y_k = x \cdot y$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Omezené posloupnosti

Definice (omezená posloupnost)

Posloupnost $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$ v $\mathbb{R}^n$ se nazve **omezená**, jestliže existuje $R > 0$ tak, že $\|x_k\| \leq R$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Příklad

- ❶ Posloupnost $((1, k))_{k=1}^{+\infty}$ není omezená.
 - ❷ Posloupnost $((\frac{1}{k}, (-1)^k))_{k=1}^{+\infty}$ je omezená.
- Každá konvergentní posloupnost je nutně omezená.
 - Ne každá omezená posloupnost je konvergentní (viz příklad výše).
 - Všimněme si, že z posloupnosti $((\frac{1}{k}, (-1)^k))_{k=1}^{+\infty}$ můžeme vynecháním vhodných členů vytvořit konvergentní posloupnost. Je to náhoda?

Podposloupnosti

Definice (podposloupnost)

Podposloupnost posloupnosti $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$ v $\mathbb{R}^n$ je posloupnost $(x_{k_l})_{l=1}^{+\infty}$, kde $(k_l)_{l=1}^{+\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Místo $(x_{k_l})_{l=1}^{+\infty}$ budeme také psát $(x_{k(l)})_{l=1}^{+\infty}$.

Příklad

Podposloupnosti posloupnosti $\left(\left(\frac{1}{k}, (-1)^k\right)\right)_{k=1}^{+\infty}$ jsou například

- 1 $\left(\left(\frac{1}{l+1}, (-1)^{l+1}\right)\right)_{l=1}^{+\infty};$
- 2 $\left(\left(\frac{1}{2l}, 1\right)\right)_{l=1}^{+\infty};$
- 3 $\left(\left(\frac{1}{2l+1}, -1\right)\right)_{l=1}^{+\infty}.$

Podposloupnosti

Tvrzení (konvergence podposloupností)

Konverguje-li posloupnost $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$ bodů v $\mathbb{R}^n$ k x , pak k bodu x konverguje také každá její podposloupnost.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (Bolzanova-Weierstrassova věta)

Každá omezená posloupnost $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$ bodů v $\mathbb{R}^n$ má konvergentní podposloupnost.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Předpoklad omezenosti v Bolzanově-Weierstrassově věta je podstatný. Například číselná posloupnost $(k)_{k=1}^{+\infty}$ nemá konvergentní podposloupnost.

Okolí bodu

Definice (okolí a prstencové okolí bodu)

Nechť $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\varepsilon > 0$. Množinu

$$U(\mathbf{x}; \varepsilon) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon\}$$

nazýváme **okolí bodu $\mathbf{x}$ o poloměru ε** . Množinu

$$P(\mathbf{x}; \varepsilon) := U(\mathbf{x}; \varepsilon) \setminus \{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon\}$$

nazýváme **prstencové okolí bodu $\mathbf{x}$ o poloměru ε** .

- Nebude-li nutné specifikovat poloměr ε okolí a prstencového okolí, budeme stručněji psát $U(\mathbf{x})$ a $P(\mathbf{x})$.

Vnitřek, hranice a uzávěr množiny

Definice (vnitřek, hranice a uzávěr množiny)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $x \in \mathbb{R}^n$ je

- 1 **vnitřní bod** množiny M , jestliže existuje $U(x)$ tak, že $U(x) \subseteq M$;
- 2 **hraniční bod** množiny M , jestliže pro každé $U(x)$ platí $U(x) \cap M \neq \emptyset$ a současně $U(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$.

Vnitřek $\text{int}(M)$ množiny M je množina všech vnitřních bodů množiny M .

Hranice ∂M množiny M je množina všech hraničních bodů množiny M .

Uzávěr $\overline{M}$ množiny M je množina $M \cup \partial M$.

Vnitřek, hranice a uzávěr množiny

Příklad

Ať $M = [0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Potom

$$\operatorname{int}(M) = (0, 1),$$

$$\partial M = \{0, 1\},$$

$$\overline{M} = [0, 1].$$

Příklad

Ať $M = [0, 1) \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Potom

$$\operatorname{int}(M) = \emptyset,$$

$$\partial M = \overline{M} = [0, 1] \times \{0\}.$$

Otevřené a uzavřené množiny

Definice (otevřená a uzavřená množina)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že množina M je **otevřená**, jestliže $M = \text{int}(M)$. Množina M se nazve **uzavřená**, jestliže $M = \overline{M}$.

Příklad

- 1 Prázdná množina a $\mathbb{R}^n$ jsou množiny otevřené a současně uzavřené v $\mathbb{R}^n$.
- 2 Interval $[0, 1)$ není otevřená ani uzavřená množina.
- 3 Každé okolí bodu v $\mathbb{R}^n$ je otevřená množina.
- 4 Množina

$$B(\mathbf{x}; r) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq r\},$$

která se nazývá **n -dimenzionální koule** se středem $\mathbf{x}$ a poloměrem r , je uzavřená.

Otevřené a uzavřené množiny

Tvrzení (charakterizace uzavřené množiny)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- 1 M je uzavřená množina v $\mathbb{R}^n$.
- 2 $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^n$.
- 3 Každá konvergentní posloupnost bodů v M má limitu ležící v M .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Lze ukázat, že:

- Libovolné sjednocení a konečný průnik otevřených množin jsou otevřené množiny.
- Konečné sjednocení a libovolný průnik uzavřených množin jsou uzavřené množiny.
- $\overline{M}$ je průnik všech uzavřených množin obsahujících M .
- $\text{int}(M)$ je sjednocení všech otevřených podmnožin množiny M .

Hromadné a izolované body

Definice (hromadný a izolovaný bod)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $x \in \mathbb{R}^n$ je

- ① **hromadný bod** množiny M , jestliže existuje posloupnost $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$ bodů v $M \setminus \{x\}$ konvergující k x .
- ② **izolovaný bod** množiny M , jestliže $x \in M$ a x není hromadný bod M .

Příklad

- ① Konečná množina nemá hromadné body, má jen izolované.
- ② Každý vnitřní bod množiny je jejím hromadným bodem.
- ③ Množina $\{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ má jediný hromadný bod, a to 0.
- ④ Ať $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0\}$. Hromadné body množiny M jsou body na jednotkové kružnici se středem v počátku. Množina M má jediný izolovaný bod, a to počátek.

Hromadné a izolované body

Příklad (pokračování)

- ⑤ Jediné hromadné body množiny $M = \left\{ \left(\sqrt[k]{k}, \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \right) \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ jsou $(1, -1)$, $(1, 0)$ a $(1, 1)$.

Tvrzení (charakterizace hromadných a izolovaných bodů)

Ať $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$.

- ① Bod x je hromadný bod množiny M právě tehdy, když pro každé $P(x)$ je $P(x) \cap M \neq \emptyset$;
- ② Bod x je izolovaný bod množiny M právě tehdy, když existuje $U(x)$ tak, že $U(x) \cap M = \{x\}$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Hromadné a izolované body

- Hromadný bod může existovat, jen když je množina nekonečná.
- Ne každá nekonečná množina však má hromadný bod.

Definice (omezená množina)

Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve **omezená**, jestliže existuje reálné číslo $R > 0$ tak, že $\|x\| \leq R$ pro každé $x \in M$.

Tvrzení (existence hromadného bodů)

Každá nekonečná omezená množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ má hromadný bod.

Důkaz: Viz přednáška. ■