

Matematická analýza 2

Plošný integrál

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Definice (funkce třídy C^1 na uzavřené množině)

Ať $D \subseteq \mathbb{R}^n$ uzávěr neprázdné otevřené množiny. Řekneme, že funkce $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **třídy C^1** , jestliže existuje funkce $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je nějaká otevřená množina obsahující D , třídy C^1 tak, že $\Psi|_D = \Phi$. Pro každé $a \in \partial D$ a pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ v takovém případě definujeme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(a) := \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(a).$$

- Lze ukázat, že definice $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ v hraničních bodech množiny D nezávisí na konkrétní volbě funkce Ψ .

Regulární plocha

Definice (regulární plocha)

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je sjednocením Jordanovy křivky a jejího vnitřku. Množina $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se nazývá **regulární plocha**, jestliže existuje spojitá vektorová funkce $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ splňující

- 1 $\Phi(D) = S$;
- 2 Φ je třídy C^1 ;
- 3 Φ je prostá na $\text{int}(D)$;
- 4 pro každé $x \in \text{int}(D)$ má Jacobiho matice $J_\Phi(x)$ hodnost 2.

Zobrazení Φ se nazývá **parametrizace regulární plochy** S .

Pro každé $(u, v) \in \text{int}(D)$ zavádíme následující terminologii:

- $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \dots$ **tečné vektory** k S v bodě $\Phi(u, v)$.
- $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \dots$ **normálový vektor** k S v bodě $\Phi(u, v)$.

Regulární plocha

Příklad

- ❶ Ať $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je sjednocení Jordanovy křivky a jejího vnitřku, je třídy C^1 . Pak

- $(u, v) \in D \mapsto (f(u, v), u, v)$,
- $(u, v) \in D \mapsto (u, f(u, v), v)$,
- $(u, v) \in D \mapsto (u, v, f(u, v))$.

jsou parametrizace regulárních ploch.

Tedy například $S = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ je regulární plocha.

- ❷ $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1, y \in [0, 5]\}$ je regulární plocha. Jedna z jejích parametrizací je

$$\Phi(u, v) = (\cos u, v, \sin u), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 5].$$

- ❸ $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ je regulární plocha. Jedna z jejích parametrizací je

$$\Phi(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

Plošný integrál reálné funkce přes regulární plochu

Definice

Nechť S je regulární plocha s parametrizací $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ a f je spojitá reálná funkce definovaná na S . Potom **plošný integrál funkce f přes regulární plochu S** definujeme předpisem

$$\int_S f(\mathbf{x}) \, d\sigma := \int_D f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right\| \, d\lambda_2(u, v).$$

Obsah regulární plochy S je číslo

$$\text{obsah}(S) := \int_S 1 \, d\sigma.$$

- Lze ukázat, že definice reálné funkce přes regulární plochu S nezávisí na zvolené parametrizaci plochy S .

Plošný integrál reálné funkce přes regulární plochu

Příklad

Je dána plocha $S = \left\{ \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$. Potom

$$\text{obsah}(S) = \int_S 1 \, d\sigma = \sqrt{2}\pi.$$

Příklad

Nechť S je horní polosféra se středem v počátku a poloměrem 1. Potom

$$\int_S x^2 + y^2 \, d\sigma = \frac{4\pi}{3}.$$

Ať S je regulární plocha.

- Řekneme, že $x \in S$ je **bod okraje regulární plochy S** , jestliže není „obklopen ze všech stran“ body z S .
- Množina všech bodů okraje regulární plochy S se nazývá **okraj regulární plochy S** a značí se $O(S)$.
- Jestliže $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizace S , pak $O(S) \subseteq \Phi(\partial D)$.

Příklad

- 1 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 2]\}$, pak $O(S) = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y, 2) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
- 2 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, pak $O(S) = \emptyset$.

Plocha

Definice (plocha)

Množina S se nazve **plocha**, jestliže existuje konečná posloupnost $(S_i)_{i=1}^m$ regulárních ploch takových, že

- 1 $S = \bigcup_{i=1}^m S_i$;
- 2 jestliže $i \neq j$, pak $S_i \cap S_j = O(S_i) \cap O(S_j)$ je buď prázdná množina, nebo oblouk;
- 3 jestliže $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$ jsou tři navzájem různé indexy, pak $S_i \cap S_j \cap S_k$ je konečná množina.

Posloupnost $(S_i)_{i=1}^m$ se nazývá **rozklad plochy S** . **Okraj plochy S** je uzávěr množiny všech bodů $x \in S$, pro které existuje index i tak, že $x \in O(S_i)$ a $x \notin O(S_j)$, kdykoli $j \neq i$. Řekneme, že plocha S je **uzavřená**, jestliže $O(S) = \emptyset$.

Příklad

Hranice krychle $[0, 1]^3$ je uzavřená plocha.

Plošný integrál reálné funkce

Definice (plošný integrál reálné funkce)

Ať S je plocha, $(S_i)_{i=1}^m$ je rozklad plochy S na regulární plochy a f je reálná funkce spojitá na S . Potom **plošný integrál funkce f přes plochu S** definujeme předpisem

$$\int_S f(\mathbf{x}) \, d\sigma := \sum_{i=1}^m \int_{S_i} f(\mathbf{x}) \, d\sigma.$$

Obsah plochy S je číslo

$$\text{obsah}(S) := \int_S 1 \, d\sigma.$$

- Lze ukázat, že integrál nezávisí na volbě rozkladu plochy S .
- Alternativní značení plošného integrálu: $\int_S f$.

Příklad

Mějme plochu S zadanou rozkladem (S_1, S_2) , kde

- S_1 je horní polosféra se středem v počátku a poloměrem 1;
- S_2 je kruh v rovině $z = 0$ se středem v počátku a poloměrem 1.

Potom

$$\int_S x^2 + y^2 \, d\sigma = \frac{11\pi}{6}.$$

Orientovaná regulární plocha

- Idea orientace: pomocí spojitého vektorového pole jednotkových normálových vektorů vybereme jednu stranu plochy.

Definice (orientovaná regulární plocha)

Ať S je regulární plocha. Spojité vektorové pole $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ se nazve **jednotkové normálové pole regulární plochy S** , jestliže pro každé $x \in S \setminus O(S)$ je $N(x)$ jednotkový normálový vektor k S v bodě x . Každé jednotkové normálové pole N regulární plochy S se nazývá **orientace regulární plochy S** a dvojice (S, N) se nazývá **orientovaná regulární plocha**.

- Některé regulární plochy nelze orientovat (tj. neexistuje pro ně jednotkové normálové pole). Příkladem takové plochy je Möbiova páska.
- Nemůže-li dojít k nedorozumění, pak orientovanou regulární plochu (S, N) značíme jen symbolem S .

Orientovaná regulární plocha

Příklad

- ① Necht' $R > 0$ a

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Potom

$$N(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \mathbf{x} \in S,$$

je jednotkové normálové pole sféry S .

- ② Je dána regulární plocha S parametrizací $\Phi(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, $(u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$. Potom

$$N(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad \mathbf{x} \in S,$$

je jednotkové normálové pole regulární plochy S .

Orientovaná plocha

- Pokud máme plochu slepenou z více regulárních ploch, pak musí být jednoduché plochy orientovány „konzistentně“.
- Ať $(S, \mathbf{N})$ je orientovaná regulární plocha a (C, τ) je orientovaná křivka, kde $C \subseteq O(S)$. Řekneme, že **orientace τ je souhlasná s $\mathbf{N}$** , jestliže při pohybu po křivce C ve směru orientace τ s hlavou ve směru $\mathbf{N}$ máme plochu S po levé ruce.

Definice (orientovaná plocha)

Řekneme, že $(S, \mathbf{N})$ je **orientovaná plocha**, jestliže platí:

- 1 S je plocha s rozkladem $(S_i)_{i=1}^k$;
- 2 $\mathbf{N} = (\mathbf{N}_i)_{i=1}^k$, kde $\mathbf{N}_i$ je jednotkové normálové pole regulární plochy S_i pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$;
- 3 kdykoli $i \neq j$, $C = O(S_i) \cap O(S_j)$ je oblouk, τ_i je orientace C souhlasná s $\mathbf{N}_i$ a τ_j je orientace C souhlasná s $\mathbf{N}_j$, pak $\tau_i = -\tau_j$.

Plošný integrál vektorového pole

Definice (plošný integrál vektorového pole)

Je-li $(S, \mathbf{N})$ orientovaná plocha, $\mathbf{N} = (\mathbf{N}_i)_{i=1}^k$ a $\mathbf{F}$ spojitě vektorové pole na S , potom **plošný integrál vektorového pole $\mathbf{F}$ přes orientovanou plochu $(S, \mathbf{N})$** definujeme předpisem

$$\int_{(S, \mathbf{N})} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} := \sum_{i=1}^k \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_i d\sigma.$$

- Místo $\int_{(S, \mathbf{N})} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ píšeme také $\int_{(S, \mathbf{N})} \mathbf{F}$. Nemůže-li dojít k nedorozumění, pak píšeme jen $\int_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ nebo $\int_S \mathbf{F}$.
- $\int_{(S, \mathbf{N})} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ interpretujeme jako tok vektorového pole $\mathbf{F}$ orientovanou plochou $(S, \mathbf{N})$.

Plošný integrál vektorového pole

Jestliže $(S, \mathbf{N})$ je orientovaná regulární plocha a $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ je parametrizace S splňující

$$\mathbf{N}(\Phi(u, v)) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

pro skoro všechna $(u, v) \in D$, potom

$$\int_{(S, \mathbf{N})} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_D \mathbf{F}(\Phi(u, v)) \cdot \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right] d\lambda_2(u, v)$$

Příklad

Ať $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ je plocha orientovaná jednotkovým normálovým polem, které má v bodě $(0, 0, 1)$ třetí komponentu kladnou. Jestliže $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$, pak

$$\int_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\pi}{3}.$$

Plošný integrál vektorového pole

- Ať $(S, \mathbf{N})$, kde $\mathbf{N} = (\mathbf{N}_i)_{i=1}^k$, je orientovaná plocha taková, že S hranicí oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Řekneme, že $(S, \mathbf{N})$ je **orientovaná vnějším normálovým polem**, jestliže pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ a každé $\mathbf{x} \in S_i \setminus O(S_i)$ je $\mathbf{N}_i(\mathbf{x})$ vektor směřující ven z Ω .

Příklad

Ať $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, 0, 1)$ a S je hranice množiny $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 2]\}$ orientovaná vnějším normálovým polem. Potom

$$\int_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 2\pi.$$

Gaussova věta

- Divergence vektorového pole $\mathbf{F}$ je funkce

$$\nabla \cdot \mathbf{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

- Místo $\nabla \cdot \mathbf{F}$ se často píše $\operatorname{div} \mathbf{F}$.

Věta (Gaussova věta)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je omezená oblast, jejíž hranice je uzavřená plocha S orientovaná vnějším normálovým polem. Jestliže $\mathbf{F} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ je vektorové pole třídy C^1 , potom

$$\int_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\lambda_3(\mathbf{x}).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Protože $\lambda_3(S) = 0$, je také $\int_S \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\overline{\Omega}} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\lambda_3(\mathbf{x})$.

Příklad

Ať $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - e^{y-z}, xy + z^2, xz^3 + \sin y)$ a S je hranice množiny $M = [0, 1]^3$ orientovaná vnějším normálovým polem. Potom

$$\int_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 3.$$

- Ať $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}$ je vektorové pole třídy C^1 na nějakém $U(\mathbf{p})$ a $B(\mathbf{p}; r)$ je koule se středem v bodě $\mathbf{p}$ a poloměrem r . Jestliže $S(\mathbf{p}; r)$ je hranice koule $B(\mathbf{p}; r)$ orientovaná vnějším normálovým polem, potom

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\int_{S(\mathbf{p}; r)} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\lambda_3(B(\mathbf{p}; r))}.$$

Stokesova věta

- Připomeňme, že rotace vektorového pole $\mathbf{F}$ je vektorové pole

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

- Místo $\nabla \times \mathbf{F}$ se často píše $\text{rot} \mathbf{F}$.

Věta (Stokesova věta)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast, $S \subseteq \Omega$ je plocha s okrajem C , kde C je křivka, a $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ je vektorové pole třídy C^1 . Jestliže křivka C a plocha S jsou souhlasně orientované, potom

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Stokesova věta

Příklad

Ať C je okraj čtverce s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ a $(0, 1, 0)$, který je orientován proti směru hodinových ručiček při pohledu shora. Jestliže $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x + y, e^y - x, \sin z)$, potom

$$\int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s} = -2.$$

Příklad

Mějme polosféru $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$ orientovanou jednotkovým normálovým polem s třetí komponentou nezápornou. Jestliže $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x + yz, \arctg(xyz))$, potom

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 4\pi.$$

- Jsou dány bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ a rovina ϱ procházející bodem $\mathbf{a}$. Ať $\mathbf{n}$ je normálový vektor roviny ϱ a $K(\mathbf{a}; r) \subseteq \varrho$ je kruh se středem $\mathbf{a}$ a poloměrem $r > 0$ orientovaný jednotkovým normálovým polem $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}$. Položme $C(\mathbf{a}; r) = \partial K(\mathbf{a}; r)$. Jestliže $C(\mathbf{a}; r)$ je orientovaná souhlasně s $K(\mathbf{a}; r)$, potom

$$\mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{a})] = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\int_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s}}{\text{obsah}(K(\mathbf{a}; r))}.$$