

Matematická analýza 2

Posloupnosti a řady funkcí

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Posloupnost funkcí

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Posloupnost $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ se nazve **posloupnost funkcí na D** .

Definice (bodová konvergence)

Ať $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \subseteq D$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ funkcí na D **konverguje bodově k f na M** , jestliže pro každé $x \in M$ je

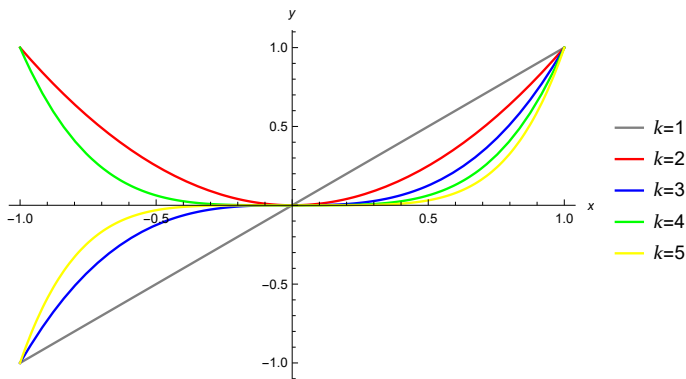
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = f(x).$$

Terminologie a značení:

- $f_k \rightarrow f$ na M ... $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ konverguje bodově k f na M .
- $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ **konverguje bodově na M** ... existuje $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $f_k \rightarrow f$ na M .

Příklad

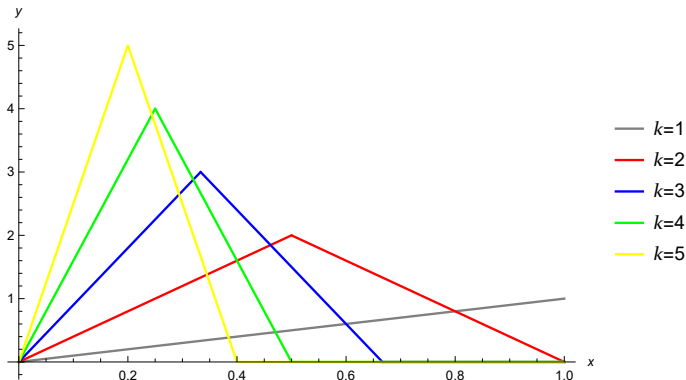
Nechť $f_k(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$. Potom $f_k \rightarrow f$ na $(-1, 1]$, kde $f(x) = 0$ pro každé $x \in (-1, 1)$ a $f(1) = 1$.



Posloupnost funkcí

Příklad

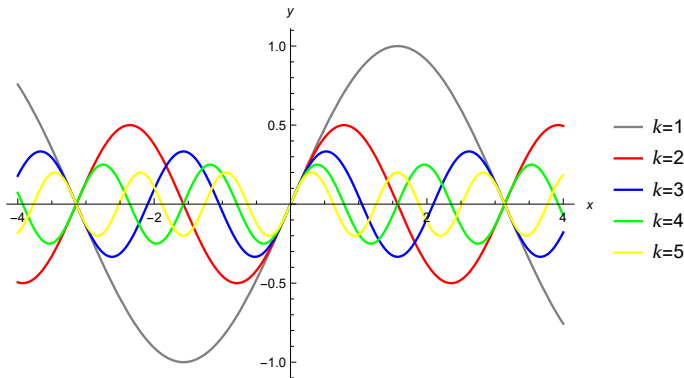
Nechť $f_k = k^2 x \chi_{[0, \frac{1}{k}]}(x) + k^2 (\frac{2}{k} - x) \chi_{(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}]}(x)$. Potom $f_k \rightarrow f$ na $[0, 1]$, kde $f(x) = 0$. Snadno ukážeme, že $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_k(x) dx \neq \int_0^1 f(x) dx$.



Posloupnost funkcí

Příklad

Nechť $f_k(x) = \frac{1}{k} \sin(kx)$. Potom $f_k \rightarrow f$ na $\mathbb{R}$, kde $f(x) = 0$. Snadno ukážeme, že například $\lim_{k \rightarrow +\infty} f'_k(0) \neq f'(0)$.



Stejněměrná konvergence

Definice (stejněměrná konvergence)

Ať $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \subseteq D$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ funkcí na D **konverguje stejněměrně k f na M** , jestliže

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{x \in M} |f_k(x) - f(x)| = 0.$$

- $f_k \Rightarrow f$ na M ... $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ konverguje stejněměrně k f na M .
- $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ **konverguje stejněměrně na M** ... existuje $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $f_k \Rightarrow f$ na M .
- $f_k \Rightarrow f$ na M právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $k \geq K(\varepsilon)$ a pro každé $x \in M$ je $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.
- Je-li $N \subseteq M$ neprázdná a $f_k \Rightarrow f$ na M , potom $f_k \Rightarrow f|_N$ na N .
- Je-li $f_k \Rightarrow f$ na M , potom $f_k \rightarrow f$ na M .

Stejnomořná konvergence

Příklad

❶ Nechť

$$f_k(x) = x^k$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$. Posloupnost $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ nekonverguje stejnoměrně na $(-1, 1]$.

❷ Nechť

$$f_k(x) = \frac{1}{k} \sin(kx)$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom $f_k \Rightarrow f$ na $\mathbb{R}$, kde $f(x) = 0$.

Věta (spojitost a stejnoměrná konvergence)

Ať $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost spojitých funkcí na $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a $f_k \Rightarrow f$ na M . Potom f je spojitá.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Stejněměrná konvergence

Věta (záměna limity a integrálu)

Jestliže f_k je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $f_k \Rightarrow f$ na $[a, b]$, potom

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_a^b f_k(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (záměna limity a derivace)

Jestliže f_k je třídy C^1 na intervalu (a, b) pro každé $k \in \mathbb{N}$, $f_k \rightarrow f$ na (a, b) a $f'_k \Rightarrow g$ na (a, b) , potom $f \in C^1((a, b))$ a $f' = g$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Řady funkcí

Ať $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost funkcí na $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $a \in D$.

- $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \dots$ (nekonečná) řada funkcí na D .
- $(s_m)_{m=1}^{+\infty} := (\sum_{k=1}^m f_k)_{m=1}^{+\infty} \dots$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$.
- $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ konverguje (resp. absolutně konverguje) v bodě a , jestliže číselná řada $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(a)$ konverguje (resp. absolutně konverguje).
- $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ diverguje v bodě a , jestliže číselná řada $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(a)$ diverguje.
- Konverguje-li řada absolutně v bodě a , pak konverguje v bodě a .

Konvergence řady funkcí

Definice (konvergence řady funkcí na množině)

Ať $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ je řada funkcí na $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $(s_m)_{m=1}^{+\infty}$ je posloupnost jejích částečných součtů a $M \subseteq D$.

- 1 Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ **konverguje (bodově) na M** , jestliže konverguje v každém bodě množiny M .
- 2 Funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ na M** , jestliže

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} s_m(x)$$

pro každé $x \in M$. Píšeme $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, $x \in M$.

- 3 Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ **konverguje absolutně (bodově) na M** , jestliže absolutně konverguje v každém bodě množiny M .
- 4 Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ **konverguje stejnoměrně na M** , jestliže $(s_m)_{m=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně na M .

Geometrická řada

Ať $f_k : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pro každé celé nezáporné číslo k . Potom pod $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ rozumíme řadu $\sum_{k=1}^{+\infty} f_{k-1}$ funkcí na D .

Příklad (geometrická řada)

Uvažme řadu $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, kde klademe $x^0 = 1$.

- 1 Pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x| \geq 1$ řada diverguje.
- 2 Pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x| < 1$ řada konverguje (dokonce absolutně) a platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ nekonverguje stejnoměrně na $(-1, 1)$. Ale konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[-a, a]$, kde $0 < a < 1$.

Důsledky stejnoměrné konvergence řady funkcí

Věta (záměna řady a integrálu)

Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ je řada spojitých funkcí na $[a, b]$ konvergující stejnoměrně k f na $[a, b]$, pak f je spojitá funkce a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) \, dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \, dx.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (záměna řady a derivace)

Jestliže f_k je třídy C^1 na intervalu (a, b) pro každé $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ konverguje na (a, b) a $\sum_{k=1}^{+\infty} f'_k$ konverguje stejnoměrně na (a, b) , potom

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} f'_k$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Stejněměrná konvergence řady funkcí

Věta (Weierstrassovo kritérium)

Jestliže $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost funkcí na $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tak, že $|f_k(x)| \leq \lambda_k$ pro každé $x \in M \subseteq D$. Jestliže $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k$ konverguje, pak $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně na M .

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

Řada

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

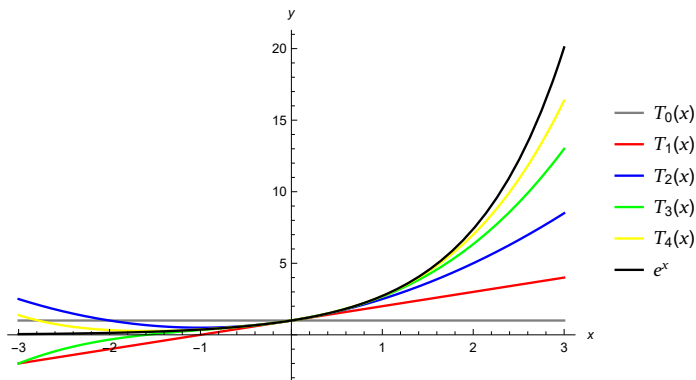
konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Mocninné řady – motivace

- Taylorův polynom řádu $k \in \mathbb{N}_0$ funkce e^x v bodě 0 je

$$T_k(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{k!}x^k.$$

- Lze e^x psát jako „nekonečný polynom“ $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$?



Definice

Řada tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

kde klademe $(x - x_0)^0 = 1$, se nazývá **mocninná řada** se středem $x_0 \in \mathbb{R}$ a koeficienty $a_k \in \mathbb{R}$.

- Každá mocninná řada konverguje ve svém středu. Konverguje ještě v jiných bodech?
- Konverguje mocninná řada stejnoměrně na nějaké množině?

Poloměr konvergence mocninné řady

Definice (poloměr konvergence)

Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ je číslo

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 \mid \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < \infty \right\} \in [0, +\infty].$$

Je-li $R > 0$, pak $(x_0 - R, x_0 + R)$ se nazývá **interval konvergence** mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$.

Tvrzení (význam poloměru konvergence)

*Nechť R je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$.
Potom $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$*

- ❶ *konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < R$.*
- ❷ *diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| > R$.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

Číselné řady – opakování

Tvrzení (podílové kritérium)

Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ je řada nenulových reálných čísel a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L \in [0, +\infty].$$

- ① *Jestliže $L < 1$, pak $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně.*
- ② *Jestliže $L > 1$, pak $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverguje.*

Tvrzení (odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ je řada reálných čísel a_n a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L \in [0, +\infty].$$

- ① *Jestliže $L < 1$, pak $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně.*
- ② *Jestliže $L > 1$, pak $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverguje.*

Poloměr konvergence mocninné řady

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k \dots R = 0.$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k \dots R = 1.$$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{4^k} \dots R = 2.$$

$$\textcircled{4} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \dots R = \infty.$$

Věta (stejněměrná konvergence mocninné řady)

Jestliže $R > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, potom pro každé $\delta \in (0, R)$ tato řada konverguje stejněměrně na intervalu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Věta (Derivování člen po členu)

Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ má poloměr konvergence $R > 0$ a součet $f(x)$ na $(x_0 - R, x_0 + R)$.

- ❶ $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x - x_0)^{k-1}$ má poloměr konvergence R .
- ❷ Funkce f je třídy C^{∞} a navíc

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x - x_0)^{k-1}$$

pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Integrace a derivace mocninné řady

Věta (Integrovaní člen po členu)

Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ má poloměr konvergence $R > 0$ a součet $f(x)$ na $(x_0 - R, x_0 + R)$.

① $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}$ má poloměr konvergence R .

② Funkce

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}$$

je primitivní funkce k funkci $f(x)$ (tj. $F'(x) = f(x)$) na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

① Řada $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$ má součet $\frac{1}{(1-x)^2}$ pro $|x| < 1$.

② Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ má součet $-\ln(1-x)$ pro $|x| < 1$.

Rozvoj funkce do mocninné řady

Ať $x_0 \in \mathbb{R}$, $R > 0$ a f je reálná funkce třídy C^∞ na $(x_0 - R, x_0 + R)$.

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \dots$ **Taylorova řada** (případně **Taylorův rozvoj**) **funkce f v bodě x_0 .**
- Platí $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$?

Příklad

Ať

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{je-li } x \neq 0; \\ 0, & \text{je-li } x = 0. \end{cases}$$

Lze ukázat, že f je třídy C^∞ a $f^{(k)}(0) = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}_0$. Tedy

$$f(x) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \text{ pro každé } x \neq 0.$$

Rozvoj funkce do mocninné řady

Věta (Existence Taylorova rozvoje)

Nechť $k_0 \in \mathbb{N}_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ a f je třídy C^∞ na $(x_0 - r, x_0 + r)$. Jestliže existuje $L > 0$ tak, že

$$\left| f^{(k)}(x) \right| \leq \frac{Lk!}{r^k}$$

pro všechna $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ a pro všechna přirozená čísla $k \geq k_0$, potom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

pro všechna $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Rozvoj funkce do mocninné řady

Terminologie:

- Taylorova řada z právě uvedené věty se také někdy nazývá **rozvoj funkce f do mocninné řady na okolí bodu x_0** .

Příklad

❶ $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, x \in \mathbb{R}.$

❷ $e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}, x \in \mathbb{R}.$

❸ $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, x \in \mathbb{R}.$

❹ $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, x \in \mathbb{R}.$

❺ $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$ pro $|x-1| < 1$.

❻ $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ pro $|x| < 1$.