

Matematická analýza 2

Limita a spojitost

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Definice (limita vektorové funkce)

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$, a je hromadný bod množiny $M \subseteq D$ a $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce. Řekneme, že $L \in \mathbb{R}^m$ je **limita f v bodě a vzhledem k M** , jestliže pro každou posloupnost $(x_k)_{k=1}^{+\infty}$ bodů v $M \setminus \{a\}$ konvergující k a platí $f(x_k) \rightarrow L$ pro $k \rightarrow +\infty$. Pokud L je limita f v bodě a vzhledem k M , pak píšeme

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L.$$

Úmluva

Místo

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L$$

budeme pro jednoduchost často psát jen

- ① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, jestliže $M = D$;
- ② $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ V(x)}} f(x) = L$, jestliže $M = \{x \in D \mid V(x)\}$, kde $V(x)$ je nějaká výroková forma.

Věta (Heineho věta)

Nechť $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^n$, je vektorová funkce, a je hromadný bod množiny $M \subseteq D$ a $L \in \mathbb{R}^m$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- ① $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L.$
- ② *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in P(a; \delta) \cap M$ je $f(x) \in U(L; \varepsilon)$.*

Důkaz: Vynecháváme (analogické jako v jedné proměnné). ■

Tvrzení (jednoznačnost limity vektorové funkce)

Existuje-li limita vektorové funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ vzhledem k $M \subseteq D$, pak je určena jednoznačně.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad (základní příklady)

- ❶ Ať $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Potom pro každé $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}.$$

- ❷ Ať $i \in \{1, \dots, n\}$. Reálná funkce $\sigma_i(\mathbf{x}) = x_i$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se nazývá *i -tá souřadnicová projekce*. Pro každé $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \sigma_i(\mathbf{x}) = \sigma_i(\mathbf{a}) = a_i.$$

- ❸ Pro každé $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{a}\|.$$

Limita funkce

Tvrzení

Nechť $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce, a je hromadný bod množiny $M \subseteq D$ a $L \in \mathbb{R}^m$. Potom je ekvivalentní:

- ① $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L.$
- ② *Pro každou množinu $N \subseteq M$ takovou, že a je její hromadný bod, platí $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in N}} f(x) = L.$*

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

neexistuje.

Tvrzení (konvergence vektorové funkce po složkách)

Nechť $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce a a je hromadný bod množiny $M \subseteq D$. Jestliže $f_1, \dots, f_m$ jsou složky vektorové funkce f a $L = (L_1, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^m$, potom je ekvivalentní:

- ① $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L.$
- ② $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f_i(x) = L_i$ pro každé $i = 1, \dots, m.$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-3,4)} (\|(x,y)\|, x) = (5, -3).$$

Limita funkce

Tvrzení

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = A$ a $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} g(x) = B$. Pak

- ❶ $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} \alpha f(x) = \alpha A$;
- ❷ $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) + g(x) = A + B$;
- ❸ $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x)g(x) = AB$;
- ❹ *je-li $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in M$ a $B \neq 0$, potom $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$;*
- ❺ *existuje-li $\delta > 0$ tak, že $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in M \cap P(a; \delta)$, potom $A \leq B$;*
- ❻ *je-li $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ na M a $A = B$, potom $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} h(x) = A$.*

Důkaz: Viz přednáška.



Příklad

1

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x| y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

2

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{3x^2 - xy}{x^2 + y^2} = 2.$$

3

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cos \frac{1}{y}}{1 + x^2 + y^2} = 0.$$

Limita funkce

Věta (limita složené funkce)

Nechť $f : E \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Předpokládejme dále, že platí

- ❶ *a je hromadný bod množiny $M \subseteq D$;*
- ❷ *$b \in E$ je hromadný bod množiny $N \subseteq E$ a $g(M) \subseteq N$;*
- ❸ *$\lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \in N}} f(y) = f(b)$ a $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} g(x) = b$;*

Potom $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(g(x)) = f(b)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1.$$

Definice (spojitá funkce)

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{a} \in D$.

- 1 Řekneme, že vektorová funkce $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **spojitá v bodě $\mathbf{a}$** , jestliže pro každou posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{+\infty}$ bodů v D splňující $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}$ pro $k \rightarrow +\infty$ platí $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{a})$ pro $k \rightarrow +\infty$.
- 2 Funkce $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ se nazve **spojitá na $M \subseteq D$** , jestliže $\mathbf{f}$ je spojitá v každém bodě M . Je-li $\mathbf{f}$ spojitá na svém definičním oboru D , pak krátce říkáme, že $\mathbf{f}$ je **spojitá**.
- 3 Množinu všech spojitých vektorových funkcí $\mathbf{f} : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ značíme symbolem $C(M; \mathbb{R}^m)$. Je-li $m = 1$, pak místo $C(M; \mathbb{R})$ píšeme jen $C(M)$.

Věta (charakterizace spojitosti v bodě)

Nechť $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Potom je ekvivalentní

- ① f je spojitá v a .
- ② Platí jedna z následujících podmínek:
 - (i) a je izolovaný bod množiny D ;
 - (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- ③ Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in U(a; \delta) \cap D$ platí $f(x) \in U(f(a); \varepsilon)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Spojitosť

Přříklad (spojitosť konstantní funkce)

Ať $c \in \mathbb{R}^m$. Funkce $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}^n$, je spojitá.

Přříklad (spojitosť souřadnicové projekce)

Nechť $i \in \{1, \dots, n\}$ a $\sigma_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je i -tá souřadnicová projekce (tj. $\sigma_i(x) = x_i$). Potom σ_i je spojitá.

Přříklad (spojitosť normy)

Ať $f(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$. Potom f je spojitá.

Tvrzení (spojitost složek vektorové funkce)

A' $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce se složkami $f_1, \dots, f_m$. Potom f je spojitá v bodě a právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ je f_i spojitá v bodě a .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Vektorová funkce

$$\Phi(t, x, y, z) = (t, x - vt, y, z),$$

kde $v \in [0, \infty)$, je spojitá vektorová funkce.

Tvrzení (spojitost a aritmetické operace)

Nechť reálné funkce f a g jsou spojité v bodě a . Potom

- ❶ $f + g$ je spojitá v a ;
- ❷ fg je spojitá v a ;
- ❸ jestliže $g(a) \neq 0$, potom $\frac{f}{g}$ je spojitá v a ;

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

- ❶ Každý polynom je spojitá funkce.
- ❷ Každá racionální funkce je spojitá a její definiční obor je otevřená množina.

Tvrzení (spojitost složené funkce)

Nechť $f : E \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ a $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Jestliže vektorová funkce g je spojitá v bodě a a vektorová funkce f je spojitá v bodě $g(a)$, potom vektorová funkce $f \circ g$ je spojitá v bodě a .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Vektorové pole

$$F(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$$

je spojité (na svém definičním oboru $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).

Věta (charakterizace spojitosti pomocí otevřených množin)

Pro každou vektorovou funkci $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou následující výroky ekvivalentní:

- 1 f je spojitá.
- 2 Pro každou otevřenou množinu $V \subseteq \mathbb{R}^m$ existuje otevřená množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tak, že $f^{-1}(V) = \Omega \cap D$.

Důkaz: Vynecháváme. ■