

Matematická analýza 2

Funkce třídy C^k

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Funkce třídy C^k

Definice (Funkce třídy C^k)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina.

- 1 Řekneme, že $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **třídy C^0** , jestliže f je spojitá.
- 2 Necht' $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že vektorová funkce $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **třídy C^k** , jestliže všechny její parciální derivace řádu k jsou spojité.
- 3 Řekneme, že $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **třídy C^∞** , jestliže f je třídy C^k pro každé $k \in \mathbb{N}_0$.
- 4 Ať $\Omega \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$ a $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Řekneme, že funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **třídy C^k na Ω** , jestliže funkce $f|_\Omega$ je třídy C^k .

Množina všech funkcí $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ třídy C^k , kde $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, se značí symbolem $C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Je-li $m = 1$, pak místo $C^k(\Omega; \mathbb{R})$ píšeme jen $C^k(\Omega)$.

Funkce třídy C^k

Alternativní názvosloví:

Funkce třídy C^1 (na Ω) ... spojitě diferencovatelná funkce (na Ω).

Funkce třídy C^k (na Ω) ... k -krát spojitě diferencovatelná funkce (na Ω).

Příklad

- 1 Polynomy jsou funkce třídy C^∞ .
- 2 Racionální funkce jsou funkce třídy C^∞ .
- 3 Ať $f_0(x) = |x|$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ položíme

$$f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t) dt.$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkce třídy C^k , ale není třídy C^{k+1} .

Funkce třídy C^k

Platí:

- Vektorová funkce je třídy C^k na Ω právě tehdy, když všechny její složky jsou třídy C^k na Ω .

-

$$C^\infty(\Omega) \subset \dots \subset C^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega) \subset \dots \subset C^1(\Omega) \subset C(\Omega)$$

- Ať $f, g \in C^k(\Omega)$. Potom $f + g \in C^k(\Omega)$ a $fg \in C^k(\Omega)$. Jestliže navíc g nenabývá nuly v žádném bodě množiny Ω , pak $\frac{f}{g} \in C^k(\Omega)$.
- Jestliže $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ a $G \subseteq \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny, $\mathbf{g} \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $f \in C^k(G)$ a $\mathbf{g}(\Omega) \subseteq G$, potom $f \circ \mathbf{g} \in C^k(\Omega)$.
- Jestliže $k, l \in \mathbb{N}$ splňují $2 \leq l \leq k$, potom parciální derivace řádu l funkce $f \in C^k(\Omega)$ nezávisí na pořadí proměnných, podle kterých derivujeme.

Taylorův polynom

Definice (Taylorův polynom)

Ať $k \in \mathbb{N}_0$ a f je reálná funkce třídy C^k na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.
Polynom

$$T_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \nabla_{\mathbf{x}-\mathbf{a}}^i f(\mathbf{a}),$$

se nazývá **Taylorův polynom řádu k funkce f v bodě $\mathbf{a}$** .

Ať f je reálná funkce třídy C^k na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

- Pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\nabla_{\mathbf{h}}^k f(\mathbf{a}) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n h_{i_1} \dots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{a}).$$

- Různých parciálních derivací řádu k funkce f v bodě $\mathbf{a}$ je $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Taylorův polynom

Definice (Hessova matice)

Ať reálná funkce f je třídy C^2 na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Čtvercová matice

$$H_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

se nazývá **Hessova matice funkce f v bodě $\mathbf{a}$** .

- Hessova matice je symetrická.
- Je-li f reálná funkce třídy C^2 na nějakém okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, potom s využitím sloupcového zápisu vektorů můžeme pro každé $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ psát

$$\nabla_{\mathbf{h}}^2 f(\mathbf{a}) = \mathbf{h} \cdot (\mathbf{H}_f(\mathbf{a})\mathbf{h}).$$

Taylorův polynom

Taylorův polynom T_k řádu $k \in \mathbb{N}_0$ funkce f v bodě $\mathbf{a}$ je

$$\begin{aligned} T_k(\mathbf{x}) = & f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (x_i - a_i)(x_j - a_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \\ & + \cdots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k}) \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Speciální případy:



$$T_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$



$$T_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla f(\mathbf{a}).$$

- Píšeme-li vektory do sloupce, pak

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{H}_f(\mathbf{a}) (\mathbf{x} - \mathbf{a})).$$

Taylorův polynom

Příklad

Je dána funkce $f(x, y) = \ln(1 + x + 2y)$. První tři Taylorovy polynomy funkce f v bodě $\mathbf{a} = (0, 0)$ jsou

$$T_0(x, y) = 0,$$

$$T_1(x, y) = x + 2y,$$

$$T_2(x, y) = x + 2y - \frac{1}{2} (x^2 + 4xy + 4y^2) .$$

Taylorův polynom

Připomeňme, že pokud f je reálná funkce jedné proměnné třídy C^{k+1} , kde $k \in \mathbb{N}_0$, na nějakém okolí bodu a , potom

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1},$$

kde ξ je bod ležící v otevřeném intervalu s krajními body a, x a klademe $(x-a)^0 = 1$.

Bod ξ lze vyjádřit ve tvaru $\xi = a + \lambda(x-a)$ pro nějaké $\lambda \in (0, 1)$.

Položíme-li navíc $h = x - a$, pak

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(a)}{i!} h^i + \frac{f^{(k+1)}(a+\lambda h)}{(k+1)!} h^{k+1}$$

pro nějaké $\lambda \in (0, 1)$.

Taylorův polynom

- Necht' $x, y \in \mathbb{R}^n$. Úsečka s krajními body x a y je množina

$$\text{seg}(x; y) := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Věta (Taylorův vzorec s Lagrangeovým zbytkem)

Ať $k \in \mathbb{N}_0$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$ a $\text{seg}(a; a + h) \subseteq \Omega$. Jestliže f je reálná funkce třídy C^{k+1} na Ω a T_k je Taylorův polynom řádu k funkce f v bodě a , potom

$$f(a + h) = T_k(a + h) + \frac{1}{(k+1)!} \nabla_h^{k+1} f(a + \lambda h)$$

pro nějaké $\lambda \in (0, 1)$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Speciálně pro $k = 1$ můžeme závěr předchozí věty psát ve tvaru:

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot \nabla f(a) + \frac{1}{2} h \cdot (H_f(a + \lambda h) h).$$

pro nějaké $\lambda \in (0, 1)$.

Taylorův polynom

Příklad

Je dána funkce

$$f(x, y) = \ln(1 + x + 2y).$$

Potom pro každé $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ splňující $1 + x + 2y > 0$ existuje $\lambda \in (0, 1)$ tak, že

$$f(\mathbf{0} + \mathbf{h}) = f(x, y) = x + 2y + R_f(x, y),$$

kde

$$R_f(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)H_f(\lambda x, \lambda y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Protože pro $x + 2y \geq 0$ je

$$|R_f(\mathbf{h})| \leq 2 \|\mathbf{h}\|_1^2,$$

obdržíme například $f\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{20}\right) \approx \frac{1}{5}$ a $\left|R_f\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{20}\right)\right| \leq \frac{9}{200} \leq \frac{1}{20}$.

Věta (Taylorův vzorec s Peanovým zbytkem)

Ať $k \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená a $\mathbf{a} \in \Omega$. Jestliže f je reálná funkce třídy C^k na Ω a T_k je její Taylorův polynom řádu k v bodě $\mathbf{a}$, potom existuje funkce $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \omega(\mathbf{h}) = 0 = \omega(\mathbf{0})$ a pro každé $\mathbf{h} \in \{\mathbf{x} - \mathbf{a} \mid \mathbf{x} \in \Omega\}$ platí

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = T_k(\mathbf{a} + \mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|^k \omega(\mathbf{h}).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Věta o implicitní funkci – motivace

Mějme danu rovnici

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Ať M je množina všech jejích řešení.

- Množina M není grafem žádné reálné funkce jedné proměnné x .
- Je množina M alespoň lokálně grafem nějaké reálné funkce jedné proměnné x ?
- Na okolí bodů $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ nelze M popsat grafem žádné funkce proměnné x .
- Na okolí bodu $(0, 1)$ můžeme psát $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Věta o implicitní funkci

Věta (o implicitní funkci)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a $f(x_1, \dots, x_n, y) = f(\mathbf{x}, y)$ je funkce třídy C^k na Ω . Předpokládejme, že bod $(\mathbf{a}, b) \in \Omega$ splňuje

- ❶ $f(\mathbf{a}, b) = 0$
- ❷ $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$.

Pak existují $U(\mathbf{a}) \subseteq \mathbb{R}^n$, $U(b) \subseteq \mathbb{R}$ a $g \in C^k(U(\mathbf{a}))$ tak, že

- ❶ $U(\mathbf{a}) \times U(b) \subseteq \Omega$,
- ❷ $\{(\mathbf{x}, y) \in U(\mathbf{a}) \times U(b) \mid f(\mathbf{x}, y) = 0\} = \{(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in U(\mathbf{a})\}$,
- ❸

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}$$

pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{a})$ a každé $i = 1, \dots, n$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Věta o implicitní funkci

- Lze dokázat i „vektorovou verzi“ věty o implicitní funkci.
- Vzorec

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}$$

je jednoduchý důsledek řetízkového pravidla.

Příklad

Je dána funkce $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + y^2$. Zřejmě

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} = \{(-1, 0), (1, 0)\}.$$

není lokálně grafem žádné funkce třídy C^∞ . To není spor s Větou o implicitní funkci, neboť $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0$.

Věta o implicitní funkci

Nechť $f \in C^1(\Omega)$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$ a $M = \text{lev}(f; f(\mathbf{a}))$.

- Vektor $\nabla f(\mathbf{a})$ je vektor kolmý k M v bodě $\mathbf{a}$.
- **Tečná nadrovina k M v bodě $\mathbf{a}$** je nadrovina popsaná rovnicí

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0.$$

Příklad

Ať $f(x, y) = x^2 - y^2$ a $\mathbf{a} = (2, 1, 3)$. Tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $\mathbf{a}$ je tečná rovina k hladině funkce $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ výšky 0. Její normálový vektor je

$$\nabla g(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1), -1 \right) = (4, -2, -1),$$

což souhlasí s naší definicí tečné roviny ke grafu funkce.

Věta o implicitní funkci

Příklad

Tečná rovina k elipsoidu

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} = 1 \right\}$$

v bodě $(3, -1, -2)$ je rovina o rovnici

$$\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 2 = 0.$$

Věta o inverzní funkci

Kdy lze funkci třídy C^k alespoň lokálně invertovat tak, aby inverze byla opět třídy C^k ?

Věta (o inverzní funkci)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\mathbf{f} \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, pro nějaké $\mathbf{a} \in \Omega$ je $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$ invertibilní (tj. $\det \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$) a $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. Pak existují otevřené množiny U a V v $\mathbb{R}^n$ tak, že

- ❶ $\mathbf{a} \in U$, $\mathbf{b} \in V$, $\mathbf{f}$ je prosté na U a $\mathbf{f}(U) = V$;
- ❷ je-li $\mathbf{g} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ inverzní zobrazení k $\mathbf{f}|_U$, pak $\mathbf{g} \in C^k(V; \mathbb{R}^n)$ a navíc

$$\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\mathbf{b}) = [\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{b}))]^{-1}.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Věta o inverzní funkci – záměna proměnných

Nechť $c > 0$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a $\Phi : (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + ct, x - ct)$.

- $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a jeho inverze $\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jsou třídy C^∞ .
- Položme $g = f \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pak g je třídy C^2 , $f = g \circ \Phi$ a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

Tedy $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = 0$ na $\mathbb{R}^2$. Obecné řešení vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

na $\mathbb{R}^2$ proto je

$$f(t, x) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct),$$

kde $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$ jsou libovolné.