

Matematická analýza 2

Extrémy funkcí

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Minimum a maximum funkce

Definice (Minimum a maximum funkce)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $M \subseteq D$. Řekneme, že $a \in M$ je **bod minima** (resp. **bod maxima**) **funkce f na M** , jestliže pro každé $x \in M$ je $f(a) \leq f(x)$ (resp. $f(a) \geq f(x)$). Je-li $a \in M$ bod minima (resp. maxima) f na M , pak hodnotu $f(a)$ nazýváme **minimem** (resp. **maximem**) **funkce f na M** .

Poznámka:

- a je bod maxima f na M právě tehdy, když a je bod minima $-f$ na M .

Terminologie a značení:

- **bod extrému funkce f na M** ... bod minima nebo bod maxima.
- **extrém funkce f na M** ... minimum nebo maximum funkce f na M .
- $\min_{x \in M} f(x)$... minimum funkce f na M .
- $\max_{x \in M} f(x)$... maximum funkce f na M .
- Ve všech výše uvedených pojmech často vynecháváme „na M “, jestliže $M = D$.

Minimum a maximum funkce

Příklad

Ať $f(x) = \|x\|$.

- 1 existuje právě jeden bod minima f (na $\mathbb{R}^n$) a neexistuje žádný bod maxima f (na $\mathbb{R}^n$).
- 2 f má v každém bodě $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ minimum a také maximum na M .
- 3 f nemá v žádném bodě $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x\|\}$ minimum ani maximum na M .

Příklad

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Funkce f nemá bod minima.

Minimum a maximum funkce

Definice (kompaktní množina)

Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve **kompaktní**, jestliže je omezená a uzavřená.

Věta (spojitý obraz kompaktu)

Jestliže funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitá na kompaktní množině $M \subseteq D$, potom $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ je kompaktní množina.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Věta (Weierstrassova věta)

Jestliže funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na neprázdné kompaktní množině $M \subseteq D$, potom existuje bod minima a také bod maxima f na M .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Lokální extrémy

Definice (body lokálního extrému)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $M \subseteq D$. Řekneme, že $a \in M$ je **bod lokálního minima** (resp. **maxima**) **funkce f na M** , jestliže existuje okolí $U(a)$ tak, že a je bod minima (resp. maxima) f na $M \cap U(a)$;

Terminologie:

- **bod lokálního extrému funkce f na M** ... bod lokálního minima nebo bod lokálního maxima.

Definice (stacionární bod)

Ať funkce f je třídy C^1 na nějakém okolí bodu a . Řekneme, že a je stacionární bod funkce f , jestliže $\nabla f(a) = \mathbf{0}$.

Věta (Fermatova věta)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega)$ a $M \subseteq \Omega$. Jestliže $a \in \text{int}(M)$ je bod lokálního extrému f na M , pak a je stacionární bod funkce f .

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Fermatova věta dává podmínku nutnou nikoli postačující.
- Jestliže stacionární bod funkce f není bodem lokálního extrému, pak ho nazýváme **sedlovým bodem funkce f** .

Příklad

Bod $(0, 0)$ je sedlový bod funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Značení:

- $M_{m,n}(\mathbb{R})$... množina všech $m \times n$ reálných matic.
- $M_n(\mathbb{R})$... množina všech $n \times n$ reálných matic.

Ať $Q \in M_n(\mathbb{R})$.

- Nenulový vektor $v \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **vlastní vektor matice Q** , existuje-li $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $Qv = \lambda v$. Číslo λ se nazývá **vlastní číslo matice Q** .
- Řekneme, že Q je symetrická, jestliže $Q^T = Q$.
- Je-li Q symetrická, pak všechna její vlastní čísla jsou reálná a existuje ortonormální báze v $\mathbb{R}^n$ tvořená vlastními vektory matice Q .

Definice (definitnost matice)

Ať $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ je symetrická. Řekneme, že Q je

- 1 **pozitivně** (resp. **negativně**) **definitní**, jestliže pro každé $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ je $(Qx) \cdot x > 0$ (resp. $(Qx) \cdot x < 0$);
 - 2 **pozitivně** (resp. **negativně**) **semidefinitní**, jestliže pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $(Qx) \cdot x \geq 0$ (resp. $(Qx) \cdot x \leq 0$);
 - 3 **indefinitní**, jestliže Q není pozitivně semidefinitní ani negativně semidefinitní.
-
- Q je negativně definitní (resp. semidefinitní) právě tehdy, když $-Q$ je pozitivně definitní (resp. semidefinitní).

Střípky z lineární algebry

- Q je pozitivně (resp. negativně) definitní právě tehdy, když má všechna vlastní čísla kladná (resp. záporná).
- Q je pozitivně (resp. negativně) semidefinitní právě tehdy, když má všechna vlastní čísla nezáporná (resp. nekladná).

Příklad

- 1 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní.
- 2 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je pozitivně semidefinitní.
- 3 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ je indefinitní.

Věta (podmínky optimality druhého řádu)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in C^2(\Omega)$ a $\mathbf{a} \in \Omega$ je stacionární bod funkce f .

- ① Je-li $\mathbf{a}$ bod lokálního minima funkce f , potom $\mathbf{H}_f(\mathbf{a})$ je pozitivně semidefinitní.*
- ② Je-li $\mathbf{H}_f(\mathbf{a})$ je pozitivně definitní, potom $\mathbf{a}$ je bod lokálního minima.*
- ③ Je-li $\mathbf{H}_f(\mathbf{a})$ indefinitní, potom $\mathbf{a}$ je sedlový bod funkce f .*

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Je-li $\mathbf{H}_f(\mathbf{a})$ pozitivně semidefinitní, pak $\mathbf{a}$ nemusí být bod lokálního minima (viz $f(x) = x^3$).

Lokální extrémy a Hessova matice

Příklad

Je dána funkce $f(x, y) = x^3 - xy + y^2$. Stacionární body jsou

- $(0, 0)$... sedlový bod;
- $\frac{1}{12}(2, 1)$... bod lokálního minima.

Předpokládejme, že $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ a $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Symbolem Q_I označíme matici, která vznikne z Q vynecháním všech řádků a všech sloupců indexovaných prvky z množiny $\{1, \dots, n\} \setminus I$.

Příklad

Ať $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Potom $Q_{\{1,2,3\}} = Q$, $Q_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ a $Q_{\{2\}} = (-1)$.

Věta (Sylvesterovo kritérium)

Ať $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ je symetrická.

- 1 Q je pozitivně definitní právě tehdy, když pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ je $\det Q_{I_k} > 0$, kde $I_k = \{1, \dots, k\}$.
- 2 Q je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když $\det Q_I \geq 0$ pro každou neprázdnou množinu $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

Je dána funkce

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + y^2 + \frac{1}{z} + xz.$$

Její jediný stacionární bod je $(1, 0, 1)$. Jedná se o bod lokálního minima.

Příklad

Hledejme body extrémů funkce

$$f(x, y) = x^2y - x - y$$

na

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}.$$

- Body minima f na M jsou $(3, 0)$ a $(0, 3)$.
- Bod maxima f na M je jediný, a to bod $(2, 1)$.

Konvexní množina

Definice (konvexní množina)

Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve **konvexní**, jestliže pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ je $\text{seg}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \subseteq C$.

Příklad

- ❶ $\mathbb{R}^n$ a $\emptyset$ jsou konvexní množiny.
- ❷ Intervaly v $\mathbb{R}$ jsou konvexní množiny.
- ❸ Je-li $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, pak

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$$

je konvexní množina.

- ❹ Ať $r > 0$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Pak $U(\mathbf{a}; r)$ a $B(\mathbf{a}; r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\}$ jsou konvexní množiny.

Konvexní funkce

Definice (konvexní funkce)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $C \subseteq D$ je neprázdná konvexní množina. Řekneme, že f je **konvexní na C** , jestliže pro všechny $\lambda \in [0, 1]$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ je

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$

- Je-li f konvexní na svém definičním oboru, pak krátce říkáme, že f je konvexní.
- Funkce f se nazývá **konkávní na C** , jestliže $-f$ je konvexní na C .

Příklad

Ať $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{c}$ je konvexní.

Konvexní funkce

Věta (body minima konvexní funkce)

Jestliže reálná funkce f je konvexní funkce na C , potom každý bod lokálního minima f na C je bodem minima f na C .

Důkaz: Vynecháváme. ■

Věta (konvexnost a Hessova matice)

Nechť f je reálná funkce třídy C^2 na otevřené konvexní množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom f je konvexní na Ω právě tehdy, když $\mathbf{H}_f(x)$ je pozitivně semidefinitní pro každé $x \in \Omega$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

- 1 Funkce $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2$ je konvexní.
- 2 Ať $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ je symetrická a $f(x) = (Qx) \cdot x$. Potom f je konvexní funkce právě tehdy, když Q je pozitivně semidefinitní.

Konvexní funkce

Příklad

Ať $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$. Potom

$$f(x) = \|Ax - b\|^2$$

je konvexní funkce.

Věta (stacionární body konvexní funkce na otevřené množině)

Ať $f \in C^2(\Omega)$ je konvexní funkce na otevřené konvexní množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak $a \in \Omega$ je bod minima funkce f (na Ω) právě tehdy, když $\nabla f(a) = 0$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Funkce

$$f(x, y) = x^4 + y^2$$

je konvexní třídy C^∞ . Má jediný bod minima, a to bod $(0, 0)$.

Metoda nejmenších čtverců

Ať $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$. Hledejme body minima funkce

$$f(x) = \|Ax - b\|^2.$$

- Hledáme $x \in \mathbb{R}^n$ tak, aby vzdálenost mezi Ax a b byla co nejmenší.
- Má-li soustava $Ax = b$ řešení, pak množina jejích řešení se rovná množině všech bodů minima funkce f .
- O bodech minima funkce f se často mluví jako o **řešeních soustavy $Ax = b$ ve smyslu nejmenších čtverců**.

Tvrzení

Ať $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Potom a je bod minima funkce $f(x) = \|Ax - b\|^2$ právě tehdy, když a je řešením soustavy rovnic

$$A^T Ax = A^T b.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Metoda nejmenších čtverců

Příklad

Ať $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$. Řešení soustavy $Ax = b$ ve smyslu nejmenších čtverců je $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Příklad

Metodou nejmenších čtverců proložte body $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$ graf afinní funkce $\alpha x + \beta$. Hledané parametry jsou $\alpha = \frac{6}{5}$ a $\beta = \frac{8}{5}$.

Vázané extrémy

Je dána funkce

$$f(x, y) = y - 2x$$

a množina

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

Jak nalézt body extrému funkce f na M ?

- Označme $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.
- V bodech extrému musí být ∇f a ∇g rovnoběžné.

Vázané extrémý

Věta (Lagrangeova věta o multiplikátorech)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f, g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$, kde $k < n$, a

$$M = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_k(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Předpokládejme, že $\mathbf{a} \in M$ je bod lokálního extrému f na M a vektory $\nabla g_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla g_k(\mathbf{a})$ tvoří lineárně nezávislou množinu. Potom existují $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\nabla f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ z předchozí věty se nazývají **Lagrangeovy multiplikátory**.

Vázané extrémy

- $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \dots$ Lagrangeova funkce.
- Bod $\mathbf{x} \in \Omega$ je kandidát na bod lokálního extrému f na M , existuje-li $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ tak, že

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= \dots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= \dots = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0.\end{aligned}$$

Příklad

Ať $f(x, y) = x^2 + y^2$ a $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 = 0\}$. Bod minima je zřejmě $(1, 0)$, ale neexistuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\nabla f(1, 0) + \lambda \nabla g(1, 0) = (0, 0),$$

kde $g(x, y) = (x - 1)^2$. To však není spor s Lagrangeovou větou o multiplikátorech, neboť $\nabla g(1, 0)$ netvoří lineárně nezávislou množinu.

Vázané extrémy

Příklad

Ať

$$f(x, y, z) = 3x + 3y + 8z$$

a

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 1\}.$$

Bod $\frac{1}{5}(3, 3, 4)$ je bod maxima a $-\frac{1}{5}(3, 3, 4)$ je bod minima f na M .

Příklad

Najděte délky x, y, z hran krabice tvaru kváдру tak, aby krabice měla co největší objem za podmínky, že obsah jejího povrchu bez víka bude 12 dm^2 . Hledané délky stran jsou $x = y = 2 \text{ dm}$ a $z = 1 \text{ dm}$.