

Matematická analýza 2

Lebesgueův integrál

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Kvádr v $\mathbb{R}^n$ a jeho objem

- Ať pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ jsou a_k, b_k reálná čísla splňující $a_k \leq b_k$.
Množina

$$\begin{aligned} Q &= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in [a_1, b_1], \dots, x_n \in [a_n, b_n]\} \end{aligned}$$

se nazve **kvádr** v $\mathbb{R}^n$. **Objem kvádru** Q je reálné číslo

$$\text{vol}(Q) := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

- Množinu všech kvádrů v $\mathbb{R}^n$ označíme symbolem $\mathcal{K}^n$.

Příklad

- 1 $Q = [0, 0] \times [0, 0] = [0, 0]^2 = \{(0, 0)\} \in \mathcal{K}^2$ a $\text{vol}(Q) = 0$.
- 2 $Q = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3] \in \mathcal{K}^3$ a $\text{vol}(Q) = 6$.

Lebesgueova vnější míra

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$... množina všech podmnožin množiny $\mathbb{R}^n$.

Definice (Lebesgueova vnější míra)

Zobrazení $\lambda_n^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ dané předpisem

$$\lambda_n^*(M) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \text{vol}(Q_k) \mid Q_k \in \mathcal{K}^n \text{ pro každé } k \in \mathbb{N} \text{ a } M \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} Q_k \right\}$$

se nazývá (*n -rozměrná*) Lebesgueova vnější míra.

Lebesgueova vnější míra

Tvrzení (vlastnosti Lebesgueovy vnější míry)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

- ❶ Je-li $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, pak $\lambda_n^*(M + \mathbf{a}) = \lambda_n^*(M)$.
- ❷ Je-li $N \subseteq M$, pak $\lambda_n^*(N) \leq \lambda_n^*(M)$.
- ❸ $\lambda_n^*(\emptyset) = 0$.
- ❹ Jestliže M je omezená, pak $\lambda_n^*(M) < +\infty$.
- ❺ Je-li $Q \in \mathcal{K}^n$, pak $\lambda_n^*(Q) = \text{vol}(Q)$.

Důkaz: Jen body ❶ až ❹. ■

Příklad

- ❶ Jestliže $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je spočetná množina, pak $\lambda_n^*(M) = 0$.
- ❷ $\lambda_n^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

Lze „objem“ přiřadit rozumně každé množině?

- Lze ukázat, že existují disjunktní množiny $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ tak, že $\lambda_n^*(M \cup N) \neq \lambda_n^*(M) + \lambda_n^*(N)$.

Existuje $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ tak, aby množinám přiřazovalo jejich „objem“ a přitom mělo rozumné vlastnosti?

Tvrzení

Neexistuje funkce $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ splňující

- 1 $\mu([0, 1]^n) = 1$;
- 2 $\mu(M + \mathbf{a}) = \mu(M)$ pro každé $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a každé $M \subseteq \mathbb{R}^n$.
- 3 $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} M_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(M_k)$, kdykoli $(M_k)_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost po dvou disjunktních podmnožin množiny $\mathbb{R}^n$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Banachův-Tarského paradox.
- Řešení problému s aditivitou: jen některým množinám přiřadíme „objem“.

Měřitelné množiny

Definice (lebesgueovsky měřitelné množiny)

Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je **lebesgueovsky měřitelná**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tak, že $M \subseteq V$ a $\lambda_n^*(V \setminus M) < \varepsilon$. Množinu všech lebesgueovsky měřitelných množin v $\mathbb{R}^n$ označíme symbolem $\mathcal{A}^n$.

Tvrzení (vlastnosti $\mathcal{A}^n$)

- 1 Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená, pak $M \in \mathcal{A}^n$. Speciálně $\emptyset \in \mathcal{A}^n$.
- 2 Je-li $M \in \mathcal{A}^n$, pak $\mathbb{R}^n \setminus M \in \mathcal{A}^n$.
- 3 Je-li $(M_k)_{k=1}^{+\infty}$ posloupnost prvků z $\mathcal{A}^n$, pak $\bigcup_{k=1}^{+\infty} M_k \in \mathcal{A}^n$ a také $\bigcap_{k=1}^{+\infty} M_k \in \mathcal{A}^n$.
- 4 Jestliže $M, N \in \mathcal{A}^n$, pak $M \setminus N \in \mathcal{A}^n$.
- 5 Jestliže $M \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda_n^*(M) = 0$, pak $M \in \mathcal{A}^n$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Lebesgueova míra

Definice

Zobrazení $\lambda_n : \mathcal{A}^n \rightarrow [0, +\infty]$ definované předpisem $\lambda_n(M) = \lambda_n^*(M)$ se nazve **(n -rozměrná) Lebesgueova míra**.

Tvrzení (vlastnosti Lebesgueovy míry)

- 1 $\lambda_n(\emptyset) = 0$.
- 2 Jestliže $M, N \in \mathcal{A}^n$ a $N \subseteq M$, pak $\lambda_n(N) \leq \lambda_n(M)$.
- 3 Jestliže $(M_k)_{k=1}^{+\infty}$ je posloupnost po dvou disjunktních množin ležících v $\mathcal{A}^n$, pak $\lambda_n(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(M_k)$.
- 4 Jestliže $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $M \in \mathcal{A}^n$, pak $\lambda_n(M + \mathbf{a}) = \lambda_n(M)$.
- 5 Jestliže $M \in \mathcal{A}^n$ je omezená, pak $\lambda_n(M) < +\infty$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Množiny míry nula

Definice (množina míry nula)

Řekneme, že $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je **množina (Lebesgueovy) míry nula**, jestliže $\lambda_n(M) = 0$.

- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je množina míry nula právě tehdy, když $\lambda_n^*(M) = 0$.
- Každá podmnožina množiny míry nula je opět množina míry nula.

Definice (pojem skoro všude)

Ať $M \in \mathcal{A}^n$. Řekneme, že výroková forma $V(x)$ platí **skoro všude na M** (případně **pro skoro všechna $x \in M$**), jestliže existuje množina $N \subseteq M$ tak, že $\lambda_n(N) = 0$ a $V(x)$ platí pro všechna $x \in M \setminus N$.

Příklad

Ať $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ a $g(x) = 0$. Pak $f(x) = g(x)$ skoro všude na $\mathbb{R}$.

Měřitelné funkce

Definice (měřitelné funkce)

Ať $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a množina $M \subseteq D$ je měřitelná. Řekneme, že $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je **měřitelná na M** , jestliže pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$f^{-1}((a, +\infty)) \cap M = \{x \in M \mid f(x) \in (a, +\infty)\} \in \mathcal{A}^n.$$

Příklad

Funkce $f = \chi_M$ je měřitelná na $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $M \in \mathcal{A}^n$.

Tvrzení (vlastnosti měřitelných funkcí)

Ať funkce f a g jsou měřitelné na $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

- 1 Funkce $f + g$ a fg jsou měřitelné na M .
- 2 Je-li $g(x) \neq 0$ pro všechna $x \in M$, pak funkce $\frac{f}{g}$ je měřitelná na M .
- 3 Funkce $h = \max\{f, g\}$ je měřitelná na M .

Důkaz: Vynecháváme. ■

Měřitelné funkce

Příklad

Jestliže f je měřitelná na M , potom $|f|$ je měřitelná na M .

Tvrzení (spojitost implikuje měřitelnost)

Jestliže f je spojitá na $M \in \mathcal{A}^n$, potom f je měřitelná na M .

Důkaz: Vynecháváme. ■

Tvrzení

Nechť $M \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $M \in \mathcal{A}^n$. Jestliže $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je měřitelná skoro všude na M , pak f je měřitelná na M .

Důkaz: Vynecháváme. ■

Definice (jednoduchá funkce)

Funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazve jednoduchá, jestliže je měřitelná na D a navíc $f(D) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in D\}$ je konečná množina.

Lebesgueův integrál

- Konvence v této kapitole: $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Definice (Lebesgueův integrál jednoduché nezáporné funkce)

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je jednoduchá nezáporná funkce a $M \subseteq D$ je měřitelná množina. Potom **Lebesgueův integrál funkce f přes M** definujeme předpisem

$$\int_M f := \sum_{c \in f(D)} c \lambda_n(f^{-1}(\{c\}) \cap M)$$

Příklad

- 1 Jestliže $M \in \mathcal{A}^n$, pak $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_M = \int_M 1 = \lambda_n(M)$. Odtud například $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,+\infty)} = +\infty$ a $\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{[0,1] \times [0,2]} = 2$.
- 2 Jestliže $f = \chi_{[-2,2]} + 2\chi_{[1,3] \cup [4,6]}$, potom $\int_{\mathbb{R}} f = 12$.
- 3 $\int_{[0,1]} \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}} = 0$.

Lebesgueův integrál

Definice (Lebesgueův integrál nezáporné měřitelné funkce)

Ať f je nezáporná měřitelná funkce na $M \in \mathcal{A}^n$. Potom **Lebesgueův integrál funkce f přes M** definujeme předpisem

$$\int_M f := \sup \left\{ \int_M g \mid 0 \leq g \leq f \text{ na } M \text{ a } g : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ je jednoduchá} \right\}.$$

- Je-li $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nezáporná měřitelná funkce na D a $M \subseteq D$ je měřitelná množina, potom $\int_M f = \int_D f \chi_M$.

Ať $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Potom definujeme funkce

$$f^+ := \max\{f, 0\}$$

$$f^- := \max\{-f, 0\}$$

- Zřejmě $f = f^+ - f^-$ a $|f| = f^+ + f^-$.
- Je-li f měřitelná, pak f^+ a f^- jsou měřitelné.

Lebesgueův integrál

Definice (Lebesgueův integrál)

Ať f je měřitelná funkce na $M \in \mathcal{A}^n$. Potom **Lebesgueův integrál funkce f přes M** definujeme předpisem

$$\int_M f := \int_M f^+ - \int_M f^-,$$

má-li pravá strana smysl (tj. alespoň jeden z integrálů vpravo je konečný). Řekneme, že f je **(lebesgueovský) integrovatelná na M** , jestliže $\int_M f$ je reálné číslo.

- Místo $\int_M f$ se někdy používá některý z následujících symbolů:

$$\int_M f \, d\lambda_n, \int_M f(\mathbf{x}) \, d\lambda_n(\mathbf{x}), \int_M f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Vlastnosti Lebesgueova integrálu

Tvrzení (základní vlastnosti Lebesgueova integrálu)

- 1 Jestliže f, g jsou integrovatelné funkce na M a $\alpha \in \mathbb{R}$, potom
$$\int_M f + \alpha g = \int_M f + \alpha \int_M g$$
- 2 Funkce f je integrovatelná na M právě tehdy, když $\int_M |f| < +\infty$.
- 3 Jestliže f je integrovatelná na M , potom $|\int_M f| \leq \int_M |f|$.
- 4 Ať Lebesgueovy integrály $\int_M f$ a $\int_M g$ existují. Jestliže $f \leq g$ skoro všude na M , pak $\int_M f \leq \int_M g$.
- 5 Je-li f definována na $M \in \mathcal{A}^n$ a $f = 0$ skoro všude na $M \in \mathcal{A}^n$, pak $\int_M f = 0$.
- 6 Jestliže $M, N \in \mathcal{A}^n$ jsou disjunktní a f je integrovatelná funkce na $M \cup N$, potom $\int_{M \cup N} f = \int_M f + \int_N f$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Jestliže f je spojitá na kompaktní množině M , pak existuje $\int_M f$ a je konečný.

Lebesgueův integrál funkcí jedné proměnné

Tvrzení (souvinnost Riemannova a Lebesgueova integrálu)

Jestliže funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, pak je i lebesgueovsky integrovatelná na $[a, b]$ a oba integrály se rovnají.

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Lebesgueův integrál funkce f přes interval s krajními body a, b , kde $a \leq b$, budeme také značit symbolem $\int_a^b f$ nebo $\int_a^b f(x) dx$.

Tvrzení (Lebesgueův integrál a primitivní funkce)

Jestliže f je spojitá na (a, b) , F je primitivní funkce k f na (a, b) a existuje Lebesgueův integrál f přes (a, b) , potom

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Fubiniho věta

Ať $M \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$.

- Pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ definujeme $M^{[\mathbf{x}]} := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\}$.
- Pro každé $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ definujeme $M^{[\mathbf{y}]} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M\}$

Věta (Fubiniho věta)

Nechť $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce na $M \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$. Potom existují funkce $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že

- 1 $F(\mathbf{x}) = \int_{M^{[\mathbf{x}]}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\lambda_n(\mathbf{y})$ pro skoro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$;
- 2 $G(\mathbf{y}) = \int_{M^{[\mathbf{y}]}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\lambda_m(\mathbf{x})$ pro skoro všechna $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$;
- 3

$$\int_M f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\lambda_{m+n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} F(\mathbf{x}) \, d\lambda_m(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G(\mathbf{y}) \, d\lambda_n(\mathbf{y}).$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Fubiniho věta

Příklad

Z rovností

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{-x}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

plyne, že

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \neq \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx.$$

Příklad

Nechť

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq 1 - 2x\}.$$

Potom

$$\int_M x + y = \frac{1}{8}.$$

Příklad

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Příklad

Ať M je omezená množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + y + z = 1$. Potom

$$\int_M z^2 = \frac{1}{60}.$$

Věta o substituci

Věta (věta o substituci)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je prosté zobrazení třídy C^1 a $\det \mathbf{J}_\Phi(\mathbf{x}) \neq 0$ pro všechna $\mathbf{x} \in \Omega$. Jestliže $M \subseteq \Omega$ a $f : \Phi(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, potom

$$\int_{\Phi(M)} f(\mathbf{y}) \, d\lambda_n(\mathbf{y}) = \int_M f(\Phi(\mathbf{x})) |\det \mathbf{J}_\Phi(\mathbf{x})| \, d\lambda_n(\mathbf{x}),$$

má-li jedna strana smysl.

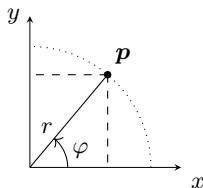
Důkaz: Vynecháváme. ■

Příklad

At' $f(x, y) = x - y$ a M je rovnoběžník s vrcholy $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$ a $(5, 3)$. Potom

$$\int_M f = 4.$$

Polární souřadnice



Ať $\Psi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem

$$\Psi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

- $\det \mathbf{J}_{\Psi}(r, \varphi) = r > 0$.
- Ψ je třídy C^∞ , avšak není prosté. Proto zmenšíme definiční obor.
- Jestliže $\Omega = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$, pak $\Phi = \Psi|_{\Omega}$ je prosté zobrazení a $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$.
- Jestliže $\Omega = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$, pak $\Phi = \Psi|_{\Omega}$ je prosté zobrazení a $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$.

Příklad

- ❶ Jestliže $g(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, pak

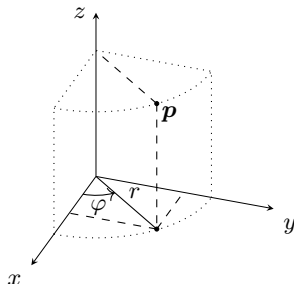
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) \, dy \, dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} g(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi}} g(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi. \end{aligned}$$

- ❷ Ať $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$ a $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$. Potom

$$\int_M f = \pi.$$

- ❸ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$

Válcové souřadnice



Ať $\Psi : (0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem

$$\Psi(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

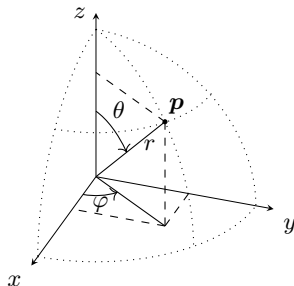
- $\det \mathbf{J}_{\Psi}(r, \varphi) = r > 0$.
- Ψ je třídy C^∞ , ale není prosté.
- Jestliže $\Omega = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, pak $\Phi = \Psi|_{\Omega}$ je prosté zobrazení a $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.

Příklad

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je homogenní těleso s hustotou $\varrho(x, y, z) = 1$ ohraničené válcovou plochou $x^2 + y^2 = 1$, rovinou $z = 0$ a paraboloidem $z = 4 + x^2 + y^2$. Moment setrvačnosti tělesa M vzhledem k ose z je

$$I_z = \int_M (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z) = \frac{7}{3}\pi.$$

Sférické souřadnice



Ať $\Psi : (0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

- $\det \mathbf{J}_{\Psi}(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta$.
- Ψ je třídy C^∞ , ale není prosté.
- Je-li $\Omega = (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, pak $\Phi = \Psi|_{\Omega}$ je prosté zobrazení, $\det \mathbf{J}_{\Phi}(r, \theta, \varphi) > 0$ a

$$\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}, x \geq 0\}.$$

Příklad

Objem množiny $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ohraničené sférou $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ a kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ je

$$\lambda_3(M) = \int_M 1 = \pi.$$