

Matematická analýza 2

Křivkový integrál

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Definice (oblouk)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$. Řekneme, že $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je **oblouk**, jestliže existuje vektorová funkce $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tak, že

- 1 $\varphi([a, b]) = C$;
- 2 kdykoli $\varphi(s) = \varphi(t)$ a $s < t$, potom $s = a$ a $t = b$;
- 3 φ' je spojitá na $[a, b]$ (v krajních bodech intervalu uvažujeme jednostranné derivace);
- 4 $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in (a, b)$.

Zobrazení φ se nazývá **parametrizace** oblouku C .

Příklad

- ❶ Ať $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ jsou dva různé body. Potom $\text{seg}(\mathbf{p}; \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ je oblouk, jehož jedna z parametrizací je

$$\varphi(t) = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}), \quad t \in [0, 1].$$

- ❷ Kružnice v rovině se středem (S_1, S_2) a poloměrem $R > 0$ je oblouk. Parametrizace je například

$$\varphi(t) = (S_1 + R \cos t, S_2 + R \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- ❸ Ať $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitou derivaci na nedegenerovaném intervalu $[a, b]$. Potom graf funkce f je oblouk v $\mathbb{R}^2$. Jeho parametrizace je například

$$\varphi(t) = (t, f(t)), \quad t \in [a, b].$$

Vztah mezi parametrizacemi oblouku

Ať $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval a funkce $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ je taková, že

- 1 g' je spojitá na $[c, d]$;
- 2 $g'(t) \neq 0$ pro každé $t \in (c, d)$;
- 3 $g([c, d]) = [a, b]$.

Jestliže $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je parametrizace oblouku C , potom $\psi = \varphi \circ g$ je také parametrizace oblouku C .

Tvrzení

Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou dvě parametrizace oblouku C , potom existuje funkce $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ zobrazující $[c, d]$ na $[a, b]$ tak, že $\psi = \varphi \circ g$, g' je spojitá na $[c, d]$ a $g'(t) \neq 0$ pro každé $t \in (c, d)$.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Vztah mezi parametrizacemi oblouku

- Parametrizace φ a ψ oblouku C jsou **souhlasné**, jestliže zobrazení g z předchozího tvrzení je rostoucí.
- Parametrizace φ a ψ oblouku C jsou **nesouhlasné**, jestliže zobrazení g z předchozího tvrzení je klesající.
- Je-li $\varphi[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizace oblouku C , pak se body $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$ nazývají **krajní body** oblouku C .
- Pojem krajního bodu nezávisí na parametrizaci.

Příklad

Uvažme

- ① $\varphi(t) = (t, t), t \in [0, 4];$
- ② $\psi(t) = (t^2, t^2), t \in [0, 2];$
- ③ $\omega(t) = (-t, -t), t \in [-4, 0].$

Zobrazení φ a ψ jsou souhlasné parametrizace oblouku $\text{seg}((0, 0); (4, 4))$, zatímco φ a ω jsou nesouhlasné parametrizace oblouku $\text{seg}((0, 0); (4, 4))$.

Křivkový integrál reálné funkce podél oblouku

Definice (křivkový integrál podél oblouku)

Nechť C je oblouk s parametrizací $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a f je reálná funkce spojitá na C . Potom křivkový integrál funkce f podél oblouku C definujeme předpisem

$$\int_C f(\mathbf{x}) \, ds := \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt.$$

Věta (nezávislost křivkového integrálu podél oblouku na parametrizaci)

Jsou-li $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dvě parametrizace oblouku C a f je reálná funkce spojitá na C , potom

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt = \int_c^d f(\psi(u)) \|\psi'(u)\| \, du.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

Křivkový integrál reálné funkce podél oblouku

Definice (délka oblouku)

Délka oblouku $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je reálné číslo $L(C) := \int_C 1 \, ds$.

Příklad

- 1 Jestliže $C = \text{seg}(\mathbf{p}; \mathbf{q}) \subseteq \mathbb{R}^n$, kde $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$, jsou dva různé body, pak $L(C) = \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|$.
- 2 Jestliže $C \subseteq \mathbb{R}^2$ je kružnice se středem (S_1, S_2) a poloměrem $R > 0$, pak $L(C) = 2\pi R$.
- 3 Jestliže $f(x, y, z) = x^2 y$ a oblouk C má parametrizaci $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, potom

$$\int_C f(x, y, z) \, ds = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Definice (křivka)

Ať $-\infty < a < b < +\infty$. Řekneme, že $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je **křivka**, jestliže existují body $p_0, \dots, p_k \in [a, b]$ a spojitá vektorová funkce $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tak, že

- 1 $C = \varphi([a, b])$;
- 2 $a = p_0 < p_1 < \dots < p_k = b$;
- 3 pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ je $C_i = \varphi([p_{i-1}, p_i])$ oblouk s parametrizací $\varphi|_{[p_{i-1}, p_i]}$;
- 4 Je-li $i \neq j$, pak $C_i \cap C_j$ je nejvýše dvouprvkovou podmnožinou množiny všech krajních bodů oblouků C_i a C_j .

Zobrazení φ se nazývá **parametrizace** křivky C . Konečná posloupnost $(C_i)_{i=1}^k$ se nazývá **rozklad křivky C na oblouky**.

- Definice křivky C lze zobecnit tak, že C nemusí být nutně kompaktní (tj. C pak může být například i přímka). My si však vystačíme s definicí výše uvedenou.

Terminologie:

- Je-li $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizace křivky C , pak body $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ nazýváme **krajní body** křivky C .
- Křivka C se nazve **uzavřená**, jestliže existuje její parametrizace $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ taková, že $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- Křivka C se nazve **jednoduchá**, jestliže existuje její parametrizace $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ taková, že $\varphi(s) = \varphi(t)$ a $s < t$ implikuje $s = a$ a $t = b$.

Příklad

- 1 Každý oblouk je jednoduchá křivka.
- 2 Ať $C \subseteq \mathbb{R}^2$ je hranice trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Potom C není oblouk, ale je to jednoduchá uzavřená křivka.

Křivkový integrál reálné funkce

Definice (křivkový integrál)

Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je křivka, $(C_i)_{i=1}^k$ je její rozklad na oblouky a f je reálná funkce spojitá na C . Potom **křivkový integrál** funkce f podél křivky C definujeme předpisem

$$\int_C f(\mathbf{x}) \, ds := \sum_{i=1}^k \int_{C_i} f(\mathbf{x}) \, ds.$$

Délka křivky C je číslo $L(C) := \int_C 1 \, ds$.

- Místo $\int_C f(\mathbf{x}) \, ds$ se občas také píše $\int_C f$.
- Definice křivkového integrálu nezávisí na rozkladu křivky na oblouky.

Příklad

Ať C je hranice čtverce $[0, 1]^2$. Potom

$$\int_C x^2 + y \, ds = \frac{11}{3}.$$

Tečné vektorové pole

Definice (tečné vektorové pole)

Ať $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je křivka s parametrizací $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a

$$D = \{ \varphi(t) \mid t \in (a, b) \text{ a } \varphi'(t) \text{ existuje oboustranná a nenulová} \}.$$

Vektorové pole $\tau : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definované předpisem

$$\tau(\varphi(t)) := \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$$

nazýváme **jednotkové tečné vektorové pole křivky C** (indukované parametrizací φ).

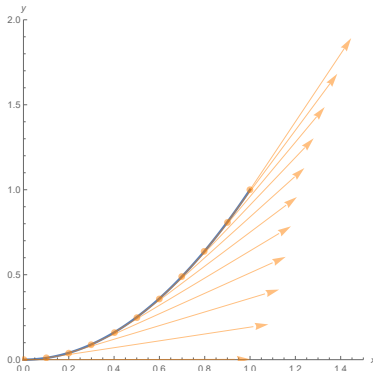
- $\tau(x)$... **tečný vektor křivky C v bodě x** (indukovaný parametrizací φ).

Tečné vektorové pole

Příklad

Jestliže $\varphi(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$, potom

$$\tau(\varphi(t)) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \right), \quad t \in (0, 1).$$

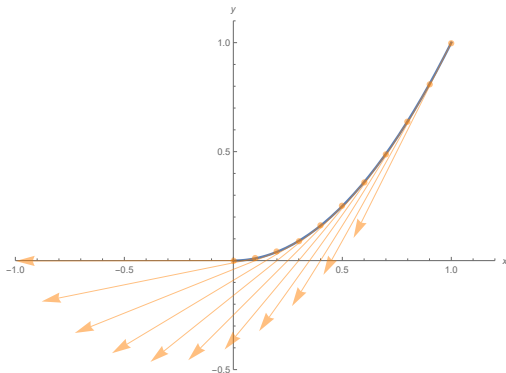


Tečné vektorové pole

Příklad

Jestliže $\varphi(t) = (1 - t, (1 - t)^2)$, $t \in [0, 1]$, potom

$$\tau(\varphi(t)) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + 4(1 - t)^2}}, -\frac{2(1 - t)}{\sqrt{1 + 4(1 - t)^2}} \right), \quad t \in (0, 1).$$



Orientace křivky

Definice (orientace křivky)

Každé jednotkové tečné vektorové pole τ křivky $C \subseteq \mathbb{R}^n$ nazýváme **orientací křivky C** . Dvojici (C, τ) nazýváme **orientovanou křivkou**.

- Pokud nemůže dojít k nedorozumění, píšeme místo (C, τ) jen C .
- Jednoduchá křivka (speciálně oblouk) má jen dvě různé orientace.
- Obecná křivka může mít více než dvě orientace.
- Orientace určuje způsob procházení křivky.
- Ať C je křivka, jejíž orientace je indukovaná parametrizací $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Potom $\varphi(a)$ se nazve **počáteční bod orientované křivky C** a $\varphi(b)$ se nazve **koncový bod orientované křivky C** .
- Jednoduchá uzavřená křivka $C \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá **Jordanova křivka**.
- Řekneme, že Jordanova křivka je **kladně orientovaná** (resp. **záporně orientovaná**), jestliže ji procházíme proti (resp. po) směru hodinových ručiček.

Křivkový integrál vektorového pole

Definice (křivkový integrál vektorového pole)

Ať (C, τ) je orientovaná křivka, $(C_i)_{i=1}^k$ je rozklad křivky C na oblouky a $\mathbf{F}$ je spojitě vektorové pole na C . Potom **křivkový integrál vektorového pole $\mathbf{F}$ podél (C, τ)** definujeme předpisem

$$\int_{(C, \tau)} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} := \sum_{i=1}^k \int_{C_i} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \tau(\mathbf{x}) d\mathbf{s}.$$

- Jestliže C je oblouk a orientace τ je indukovaná parametrizací $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, potom

$$\int_{(C, \tau)} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Křivkový integrál vektorového pole

Alternativní značení integrálu $\int_{(C,\tau)} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s}$:

- $\int_{(C,\tau)} \mathbf{F}$;
- Nemůže-li dojít k nedorozumění, pak píšeme $\int_C \mathbf{F}$ nebo $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s}$.
- Ve fyzice se občas místo $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s}$ píše

$$\int_C F_1(\mathbf{x}) dx_1 + \cdots + F_n(\mathbf{x}) dx_n.$$

Tvrzení

Nechť C je jednoduchá křivka a $\mathbf{F}$ je vektorové pole spojitě na C . Jestliže τ a σ jsou dvě různé orientace křivky C , potom

$$\int_{(C,\tau)} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{(C,\sigma)} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Křivkový integrál vektorového pole

Příklad

- ❶ At' $C \subseteq \mathbb{R}^3$ je úsečka orientovaná tak, že $(0, 0, 0)$ je její počáteční bod a $(1, 2, 3)$ je její koncový bod. Jestliže $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -z, x)$

$$\int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{2}.$$

- ❷ At' $C \subseteq \mathbb{R}^3$ je úsečka orientovaná tak, že $(1, 2, 3)$ je její počáteční bod a $(0, 0, 0)$ je její koncový bod. Jestliže $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -z, x)$

$$\int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2}.$$

- ❸ At' $C \subseteq \mathbb{R}^2$ je kladně orientovaná jednotková kružnice se středem v bodě $\mathbf{0}$. Jestliže $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$, potom

$$\int_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{s} = 2\pi.$$

Oblast

Definice (Oblast)

Otevřená množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve **oblast**, jestliže každé dva body z M je možné spojit lomenou čarou ležící v M (tj. pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ existují $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in M$ tak, že $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_k = \mathbf{y}$ a $\bigcup_{j=1}^{k-1} \text{seg}(\mathbf{x}_j; \mathbf{x}_{j+1}) \subseteq M$).

Příklad

Každá otevřená konvexní množina je oblast. Speciálně každé okolí $U(\mathbf{x})$ bodu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je oblast.

Věta (Jordanova věta)

Je-li C Jordanova křivka v $\mathbb{R}^2$, pak $\mathbb{R}^2 \setminus C$ je sjednocení omezené oblasti $\text{Int } C$ a neomezené oblasti $\text{Ext } C$, které nemají žádný společný prvek.

Důkaz: Vynecháváme. ■

Greenova věta

Terminologie:

- $\text{Int } C \dots$ **vnitřek** Jordanovy křivky C .
- $\text{Ext } C \dots$ **vnějšek** Jordanovy křivky C .

Věta (Greenova věta)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast, $C \subseteq \Omega$ je kladně orientovaná Jordanova křivka taková, že $\text{Int } C \subseteq \Omega$. Jestliže $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ je vektorové pole třídy C^1 na Ω , potom

$$\int_{\text{Int } C} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} d\lambda_2 = \int_C \mathbf{F}(x) \cdot ds.$$

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Lze ukázat, že každá Jordanova křivka má nulovou dvourozměrnou Lebesgueovu míru. Odtud

$$\int_{\overline{\text{Int } C}} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} d\lambda_2 = \int_{\text{Int } C} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} d\lambda_2.$$

Příklad

- ① Ať $M = [0, 1] \times [0, 2]$ a $\mathbf{F}(x, y) = (xy, x + e^{\arctg y})$. Jestliže C je kladně orientovaná hranice M , potom

$$\int_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{s} = 1.$$

- ② Necht' $a, b > 0$ a M je ohraničená elipsou s parametrizací $\varphi(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom obsah M je

$$\int_M 1 = \pi ab.$$

Potenciál vektorového pole

Definice (potenciál vektorového pole)

Ať $\mathbf{F}$ je spojité vektorové pole definované na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Reálná funkce $f \in C^1(\Omega)$ se nazve **potenciál** vektorového pole $\mathbf{F}$ na Ω , jestliže

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$$

na Ω . Řekneme, že $\mathbf{F}$ je **potenciální** na Ω , jestliže má na Ω potenciál.

- Potenciál vektorového pole je zobecnění primitivní funkce známé z teorie funkcí jedné proměnné.
- Jaké jsou nutné a postačující podmínky pro existenci potenciálu?
- Je potenciál určen jednoznačně (až na aditivní konstantu)?
- Jak potenciál konstruovat, pokud existuje?
- Jaká je souvislost potenciálu s křivkovým integrálem?

Potenciál vektorového pole

Příklad (centrální vektorové pole)

Ať $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Vektorové pole

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = g(\|\mathbf{x}\|)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$$

se nazývá **centrální**. Centrální vektorové pole $\mathbf{F}$ má na $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ potenciál $f(\mathbf{x}) = G(\|\mathbf{x}\|)$, kde $G(t)$ je primitivní funkce k $tg(t)$ na $(0, +\infty)$.

Speciálně

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{Kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{Ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{Kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

kde $K \in \mathbb{R}$, má potenciál

$$f(x, y, z) = -\frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Potenciál vektorového pole

Tvrzení (nutná podmínka existence potenciálu)

Jestliže $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ je potenciální vektorové pole třídy C^1 na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, potom pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$ je

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Nutná podmínka existence potenciálu na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ lze formulovat ve tvaru $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ na Ω , kde

$$\nabla \times \mathbf{F} := \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

se nazývá **rotace** vektorového pole $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

Potenciál vektorového pole

Příklad

Vektorové pole

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$$

není na $\mathbb{R}^3$ potenciální.

Tvrzení (o nulovosti gradientu)

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je oblast a f je funkce třídy C^1 na Ω . Jestliže $\nabla f = \mathbf{0}$ na Ω , potom f je konstantní na Ω .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Důsledek (o jednoznačnosti potenciálu)

Jestliže $\mathbf{F}$ je spojitě vektorové pole na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ a funkce f, g jsou jeho potenciály na Ω , potom $f - g$ je konstantní funkce na Ω .

Důkaz: Viz přednáška. ■

Potenciál vektorového pole

Věta (Newtonova-Liebnitzova formule)

Má-li spojitě vektorové pole $\mathbf{F}$ na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ potenciál f , potom

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$$

pro každou orientovanou křivku C s počátečním bodem $\mathbf{a}$ a koncovým bodem $\mathbf{b}$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Je dáno centrální vektorové pole $\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z)$ a orientovaná křivka $C \subseteq \mathbb{R}^3$ s parametrizací $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$. Potom

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{1+16\pi^2}} - 1.$$

Potenciál vektorového pole

Definice (nezávislost křivkového integrálu na cestě)

Ať $\mathbf{F}$ je spojité vektorové pole definované na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Řekneme, že **křivkový integrál vektorového pole $\mathbf{F}$ nezávisí v Ω na cestě**, jestliže

$$\int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s}$$

pro každé dvě orientované křivky $C_1, C_2 \subseteq \Omega$, jejichž počáteční body jsou stejné a také koncové body jsou stejné.

Potenciál vektorového pole

Věta (charakterizace potenciálního pole)

Ať $\mathbf{F}$ je spojité vektorové pole definované na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- 1 $\mathbf{F}$ je potenciální na Ω .
- 2 Křivkový integrál vektorového pole $\mathbf{F}$ nezávisí v Ω na cestě.
- 3 Pro každou jednoduchou uzavřenou orientovanou křivku C ležící v Ω platí

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Potenciál vektorového pole

Příklad

Nechť

$$\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Potom je splněna nutná podmínka existence potenciálu na $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (tj. $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)$ pro každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$), ale $\mathbf{F}$ nemá potenciál na žádné prstencovém okolí počátku.

Věta (o existenci potenciálu)

Nechť $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ je vektorové pole třídy C^1 na otevřené konvexní množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Jestliže pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a pro každé $\mathbf{x} \in \Omega$ je

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}),$$

potom $\mathbf{F}$ je potenciální.

Důkaz: Vynecháváme. 

Potenciál vektorového pole

Příklad

Je dáno vektorové pole

$$\mathbf{F}(x, y) = ((1 + xy)e^{xy}, x^2e^{xy}).$$

- 1 $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ na $\mathbb{R}^2$.
- 2 Potenciál f vektorového pole $\mathbf{F}$ splňující $f(0, 0) = 0$ je $f(x, y) = xe^{xy}$.
- 3 Jestliže orientovaná křivka C má parametrizaci $\varphi(t) = (\sin t, 2t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, potom

$$\int_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{s} = e^\pi.$$