

Plošný integrál

Zadání

1. Nalezněte parametrizaci plochy S , jestliže

- (a) S je část sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ ležící mezi rovinami $z = 0$ a $z = 3\sqrt{3}$;
- (b) S je část roviny $z = x+3$ ležící v množině popsané nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq 1$ a $x \geq 0$;
- (c) S je plocha vzniklá rotací křivky $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$, (ležící v rovině xy) kolem osy x .

2. Vypočtěte obsah plochy S , jestliže

- (a) S je plocha s parametrizací

$$\Phi(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u), \quad u, v \in [0, 2\pi],$$

kde $0 < b < a$;

- (b) S je část paraboloidu $z = x^2 + y^2$ ležící pod rovinou $z = 2$;
- (c) S je část sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, která je tvořena body splňujícími $z^2 \geq x^2 + y^2$.

3. Vypočtěte plošný integrál z funkce f přes plochu S , jestliže

- (a) $f(x, y, z) = x$ a S je trojúhelník s vrcholy $(1, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$, $(0, 0, 4)$;
- (b) $f(x, y, z) = y^2$ a S je část sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, která leží nad kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- (c) $f(x, y, z) = x^2 z + y^2 z$ a S je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$;

4. Vypočtěte plošný integrál z vektorového pole $\mathbf{F}$ přes orientovanou plochu S , jestliže

- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, 2z)$ a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$ je orientovaná normálovým polem s nekladnou třetí komponentou;
- (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ a $S = \{(x, y, x \sin y) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, 2], y \in [0, \pi]\}$ je orientovaná normálovým polem s nezápornou třetí komponentou;

5. Je dáno vektorové pole $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 5)$ a plocha

$$S = \partial \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, x + y \leq 2\}$$

orientovaná vnějším normálovým polem. Vypočtěte plošný integrál z vektorového pole $\mathbf{F}$ přes orientovanou plochu S

- (a) z definice plošného integrálu;
- (b) pomocí Gaussovy věty.

6. Pomocí Gaussovy věty vypočtete plošný integrál z vektorového pole $\mathbf{F}$ přes orientovanou plochu S , jestliže
- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (4x, y, 4z)$, S je sféra $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ orientovaná vnějším normálovým polem;
 - (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$, S je hranice množiny $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$, kde $a, b, c > 0$, orientovaná vnějším normálovým polem;
 - (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, xz^3, (z-1)^2)$, S je hranice množiny ohraničené plochami $x^2 + y^2 = 16$, $z = 1$, $z = 5$, která je orientovaná vnějším normálovým polem.
7. Pomocí Stokesovy věty vypočtete tok vektorového pole $\nabla \times \mathbf{F}$ orientovanou plochu S , jestliže
- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 \sin z, y^2, xy)$, S je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ ležící nad rovinou $z = 0$ a její normálové pole má nezápornou třetí komponentu;
 - (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (ze^y, x \cos y, xz \sin y)$, S je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $y \geq 0$, a její normálové pole má nezápornou druhou komponentu;
 - (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (6yz, 5x, yze^{x^2})$, plocha S je část paraboloidu $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2$ splňující $0 \leq z \leq 4$ a její normálové pole má nezápornou třetí komponentu.
8. Pomocí Stokesovy věty vypočtete křivkový integrál z vektorového pole $\mathbf{F}$ podél orientované křivky C , jestliže
- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (1, x + yz, xy - \sqrt{z})$, C je okraj části roviny $3x + 2y + z = 1$ nacházející se v prvním oktantu a je orientována proti směru hodinových ručiček, koukáme-li se na ní shora;
 - (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^3, -x^3, y^2 + z^3)$, C je průnik válcové plochy $x^2 + y^2 = 1$ s rovinou $x + y + z = 1$ a je orientována proti směru hodinových ručiček, koukáme-li se na ní shora.

Výsledky

1. (a) $\Phi(u, v) = (6 \cos u \sin v, 6 \sin u \sin v, 6 \cos v)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.
(b) $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 3 + u \cos v)$, $u \in [0, 1]$, $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(c) $\Phi(u, v) = (u, \frac{\cos v}{1+u^2}, \frac{\sin v}{1+u^2})$, $u \in [-1, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$.
2. (a) $4\pi^2 ab$;
(b) $\frac{13\pi}{3}$;
(c) $4\pi(2 - \sqrt{2})$.
3. (a) $\sqrt{\frac{7}{3}}$;
(b) $\frac{\pi}{12}(8 - 5\sqrt{2})$;
(c) 16π .
4. (a) $-\frac{32}{3}\pi$;
(b) $\frac{\pi^2}{2}$.
5. 4π .
6. (a) 96π ;
(b) $\frac{3}{4}a^2b^2c^2$;
(c) 256π .
7. (a) 0 ;
(b) 16π ;
(c) -152π .
8. (a) $\frac{1}{24}$;
(b) 2π .