

Mocninné řady

Zadání

1. Nalezněte poloměr konvergence uvedených mocninných řad.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} x^n.$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{3^n} (x-5)^n.$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n.$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n n}{n+1} x^{2n}.$

2. Vyšetřete konvergenci uvedených mocninných řad a nalezněte jejich součet.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} x^{2n+3}.$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+n)}{3^n n!} (x-2)^n.$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+1)} x^{n+1}.$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n} x^n.$

3. Nalezněte rozvoj funkce $f(x)$ do mocninné řady na okolí bodu x_0 , jestliže

(a) $f(x) = 3^x, x_0 = -3;$

(b) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, x_0 = 0;$

(c) $f(x) = \frac{1}{x+2}, x_0 = -1;$

(d) $f(x) = \frac{1}{2x-5}, x_0 = 1;$

(e) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}, x_0 = 0;$

(f) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-2x-3}, x_0 = 0;$

(g) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-2x-3}, x_0 = 2.$

Výsledky

1. (a) $R = 1$.
(b) $R = 0$.
(c) $R = +\infty$.
(d) $R = \frac{1}{2}$.
2. (a) $\frac{x^3}{5+x^2}$, $R = \sqrt{5}$.
(b) $e^{-\frac{x-2}{3}} \left(\frac{5-x}{3}\right)$, $R = +\infty$.
(c) $-x - 2\ln(2-x) + \ln 4$, $R = 2$.
(d) $\arctg(x)$, $R = 1$.
(e) $\frac{x}{(1-x)^2} - \ln(1-x)$, $R = 1$.
3. (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 3)^n}{27 \cdot n!} (x+3)^n$ pro $x \in \mathbb{R}$.
(b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1}$ pro $x \in \mathbb{R}$.
(c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$ pro $|x+1| < 1$.
(d) $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} (x-1)^n$ pro $|x-1| < \frac{3}{2}$.
(e) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (n+1)x^n$ pro $|x| < \frac{1}{2}$.
(f) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{3^{n+1}} + 2(-1)^n\right] x^n$ pro $|x| < 1$.
(g) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-1 + \frac{2(-1)^n}{3^{n+1}}\right] (x-2)^n$ pro $|x-2| < 1$.