

Funkce třídy C^k

Zadání

- Nalezněte Taylorův rozvoj druhého řádu funkce f v bodě $\mathbf{a}$, jestliže
 - $f(x, y) = x^2 + xy - y$, $\mathbf{a} = (1, 2)$;
 - $f(x, y) = xe^{\sin y}$, $\mathbf{a} = (-1, 0)$;
 - $f(x, y, z) = xyz$, $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$.
- Nalezněte jednotkový normálový vektor k ploše o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v bodě
 - $(1, 0, 0)$;
 - $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- Nalezněte rovnici tečné roviny k ploše $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ v bodě $(4, 3, 4)$.
- Nalezněte úhel sevřený dvěma plochami v bodě $\mathbf{a}$, jestliže
 - plochy jsou zadány rovnicemi $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ a $\mathbf{a} = (0, -1, 0)$;
 - plochy jsou zadány rovnicemi $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ a $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$.
- Nalezněte všechny body na elipsoidu $3x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, ve kterých je tečná rovina rovnoběžná s rovinou $-12x + 2y + 6z = 0$.
- Nalezněte všechny body na ploše $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$, ve kterých je tečná rovina rovnoběžná s některou ze souřadnicových rovin.
- Ať $f(x, y, z)$ je třídy C^1 . Vyjádřete $\frac{\partial f}{\partial x}$ ve sférických souřadnicích (tj. $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$).
- Uvedené rovnice přepište do nových proměnných:
 - $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$, $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$;
 - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$;
 - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$, $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$;
- Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $\varphi \in C^2(\Omega)$ a $\mathbf{F} \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}, \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

Ukažte, že

- (a) $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$;
- (b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$;
- (c) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$.

10. Ať $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A}$ je reálná matice 3×3 a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Co musí splňovat matice $\mathbf{A}$, aby

- (a) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$;
- (b) $\nabla \times \mathbf{F} = 0$?

Výsledky

1. Nalezněte Taylorův rozvoj druhého řádu funkce f v bodě $\mathbf{a}$, jestliže

(a) $1 + 4(x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 2)$;

(b) $-1 + (x + 1) - y + (x + 1)y - \frac{y^2}{2}$;

(c) $2 + 2(x - 1) + 2(y - 1) + (z - 2) + 2(x - 1)(y - 1) + (x - 1)(z - 2) + (y - 1)(z - 2)$.

2. (a) $(1, 0, 0)$;

(b) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, 1)$.

3. $\frac{1}{2}(x - 4) + \frac{2}{3}(y - 3) - (z - 4) = 0$.

4. (a) $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

(b) $\varphi = 0$.

5. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ a $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

6. $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ a $(1, -1, 0)$.

7.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi},$$

kde $g(r, \theta, \varphi) = f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$.

8. (a) $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$, kde $g(u, v) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$;

(b)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0,$$

kde $g(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$;

(c)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0,$$

kde $g(r, \theta, \varphi) = f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$.

10. (a) $\text{Tr } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$;

(b) $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.