Písemná část (10.02.2026)

- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**
- Pokud k úloze odevzdáte více různých řešení, hodnotí se to nejhorší z nich.
- Výsledky zbytečně neupravujte, není třeba tím ztrácet čas.
- Podúlohy na sebe nenavazují.
- **Zadání je oboustranné, nezapomeňte otočit.**

Úloha 1 ([5 bodů]).

(a) Určete $r > 0$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$3 - 7i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

(b) Určete, čemu se rovná

$$\int_C \frac{5}{z-2} + \frac{4}{z+3} + \frac{3}{z+2}\,\mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-2| = 3$.

Úloha 2 ([15 bodů]).

(a) Mějme funkci

$$u(x,y) = 6x^2y^2 - x^4 - y^4,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nalezněte všechny funkce $v(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, aby $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ byla celistvá funkce. Určete $f'(1+i)$.

(b) Určete všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$g(z) = (\operatorname{Im} z)^2 - 8\operatorname{Re} z + \alpha i z\overline{z},\ z \in \mathbb{C},$$

byla diferencovatelná v bodě $1 - 2i$.

Úloha 3 ([15 bodů]). Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{(\sin z + 1)(z + \frac{\pi}{2})}{(e^{iz} + i)^3}.$$

Úloha 4 ([15 bodů]).

(a) Najděte inverzní Z-transformaci $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ funkce

$$F(z) = z^2 \ln\left(1 + \frac{2}{z^3}\right), \; z \in U(\infty),$$

a napište, čemu se rovná a_7 a a_{10}.

[Nápověda: Využijte známého rozvoje funkce $\ln z$.]

(b) Určete Z-transformaci posloupnosti

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) * \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)_{n=0}^{\infty}.$$

[Nápověda: Využijte skutečnosti, že $\mathscr{Z}\left[\frac{(-1)^n}{n!}\right](z) = e^{-\frac{1}{z}}$.]

Úloha 5 ([15 bodů]).

(a) Určete Laplaceův obraz $Y(s)$ řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - 3y'(t) = \cos(2t)$$

s počátečními podmínkami $y(0) = -1$ a $y'(0) = 3$.

(b) Určete řešení $y(t)$ diferenciální rovnice, je-li Laplaceův obraz řešení roven

$$Y(s) = \frac{1}{(s-3)(s+2)^2}.$$

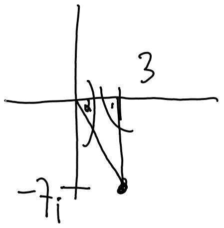
Úloha 6 ([7 bodů]). Definujte, co to znamená, že je funkce $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmonická.

Úloha 7 ([8 bodů]). Formulujte tvrzení o rovnosti komplexních čísel z a w pomocí velikosti a argumentu.

10.2.2026

1) a)

$r = |3-7i| = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

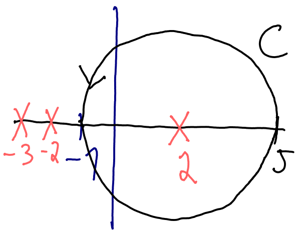


$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{3}$

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{7}{3}$

Např. $\varphi = -\alpha = -\operatorname{arctg} \frac{7}{3}$.

b)



- Singularity -3 a -2 leží mimo C, dle Cauchyovy věty je $\oint_C \frac{4}{z+3} + \frac{3}{z+2}\, dz = 0$.

- $I = \oint_C \frac{5}{z-2}\, dz = 2\pi i \operatorname{res}_{2} \frac{5}{z-2} = 2\pi i \cdot 5 = 10\pi i$.

2) a)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 12xy^2 - 4x^3$$

$$\Longrightarrow v(x,y) = \int 12xy^2 - 4x^3 \, dy = 4xy^3 - 4x^3y + C(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4y^3 - 12x^2y + C'(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\left(12x^2y - 4y^3\right) = -12x^2y + 4y^3$$

$$C'(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$C(x) = K,$$ kde $K \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow v(x,y) = 4xy^3 - 4x^3y + K,$$ kde $K \in \mathbb{R}$

$$f'(1+i) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + i\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = 12xy^2 - 4x^3 + i\left(4y^3 - 12x^2y\right)\Big|_{x=y=1} = 8 - 8i$$

---

b) $z = x + iy$

$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

$$g(z) = y^2 - 8x + \alpha i(x^2 + y^2)$$

$$u(x,y) = y^2 - 8x$$

$$v(x,y) = \alpha x^2 + \alpha y^2$$

(1) $\frac{\partial u}{\partial x}(1,-2) = \frac{\partial v}{\partial y}(1,-2)$

$$-8 = 2\alpha y\Big|_{\substack{x=1 \\ y=-2}}$$

$$-8 = -4\alpha$$

$$\alpha = 2$$

(2) $\frac{\partial u}{\partial y}(1,-2) = -\frac{\partial v}{\partial x}(1,-2)$

$$2y = -2\alpha x\Big|_{\substack{x=1 \\ y=-2}}$$

$$-4 = -2\alpha$$

$$\alpha = 2$$

✓

3) $e^{iz} = -i$

$iz = -\frac{\pi}{2} i + 2k\pi i$

$z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$

izolované singularity jsou tedy $z_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$

- $e^{iz} + i \Big|_{z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi} = 0$

$(e^{iz}+i)' \Big|_{z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi} = ie^{iz}\Big|_{z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi} = -i^2 = -1 \neq 0$

1x kořen $e^{iz}+i$

$\Downarrow$

Body $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ jsou $3 \cdot 1 = 3$-násobné kořeny $(e^{iz}+i)^3$

- $\sin z + 1 \Big|_{z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi} = -1+1 = 0$

$(\sin z + 1)' \Big|_{z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi} = \cos z \Big|_{z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi} = 0$

$(\sin z + 1)'' \Big|_{z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi} = -\sin z \Big|_{z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi} = 1 \neq 0$

2x kořen $\sin z + 1$

- Bod $-\frac{\pi}{2}$ tj. $k=0$, je zřejmě 1x kořen $z+\frac{\pi}{2}$, zatímco body $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ pro $k \neq 0$ nejsou kořen $z + \frac{\pi}{2}$.

- Bod $-\frac{\pi}{2}$ je tedy $2+1=3$x kořen čitatele, zatímco body $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ pro $k\neq 0$ jsou 2x kořeny čitatele.

Celkem:
- Bod $-\frac{\pi}{2}$ je odstranitelná singularita.
- Body $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pro $k \neq 0$ jsou póly řádu $3-2=1$.

4) a)

$$F(z)=z^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{2}{z^3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{2^n}{z^{3n-2}} \quad \text{pro } \left|\frac{2}{z^3}\right|<1$$

$$|z|>\sqrt[3]{2}$$

- $F(z)=\frac{2}{z}-\frac{4}{2z^4}+\frac{8}{3z^7}-\frac{16}{4z^{10}}+\frac{32}{5z^{13}}-\dots$

$a_7=\frac{8}{3},\ a_{10}=-\frac{16}{4}=-4$

b) $\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)*\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right](z)=\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right](z)\cdot\mathcal{Z}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right](z)$

- $\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right](z)=\frac{z}{z^2+1}$

- $\mathcal{Z}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right](z)=\mathcal{Z}[a_{n+1}](z)=z\,\mathcal{Z}[a_n](z)-z\underbrace{a_0}_{=1}=z\,e^{-\frac{1}{z}}-z$

$a_n=\frac{(-1)^n}{n!}$

- Tedy $\mathcal{Z}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)*\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right](z)=\frac{z}{z^2+1}\cdot\left(z\,e^{-\frac{1}{z}}-z\right)$.

5) a)

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3\left(sY(s) - y(0)\right) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$s^2Y(s) + s - 3 - 3sY(s) - 3 = \frac{s}{s^2+4}$$

$$(s^2-3s)Y(s) = \frac{s}{s^2+4} - s + 6$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s^2-3s)} - \frac{s-6}{s^2-3s}$$

b) $$y(t) = \operatorname{res}_{s=3} \frac{e^{st}}{(s-3)(s+2)^2} + \operatorname{res}_{s=-2} \frac{e^{st}}{(s-3)(s+2)^2}$$

- $$\operatorname{res}_{s=3} \frac{e^{st}}{(s-3)(s+2)^2} = \frac{e^{3t}}{25}$$
- $$\operatorname{res}_{s=-2} \frac{e^{st}}{(s-3)(s+2)^2} = \lim_{s\to-2}\left((s+2)^2 \frac{e^{st}}{(s-3)(s+2)^2}\right)' = \lim_{s\to-2}\left(\frac{e^{st}}{s-3}\right)' =$$
$$= \lim_{s\to-2} \frac{te^{st}(s-3) - e^{st}}{(s-3)^2} = \frac{-5t-1}{25}e^{-2t}$$

- Tedy $$y(t) = \frac{e^{3t}}{25} - \frac{5t+1}{25}e^{-2t}.$$