

Komplexní analýza

Úvod, komplexní čísla

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Základní informace

Stránka předmětu: <https://moodle.fel.cvut.cz/course/view.php?id=9685>

Věnujte pozornost pravidlům předmětu (viz Moodle).

- Podmínky zápočtu upřesní cvičící. Ze semestrálních písemek lze získat až 20 bodů ke zkoušce.
- Včas se dobře seznamte s podmínkami a průběhem zkoušky. Vějte pozornost vzorovým zadáním zkouškové písemky.

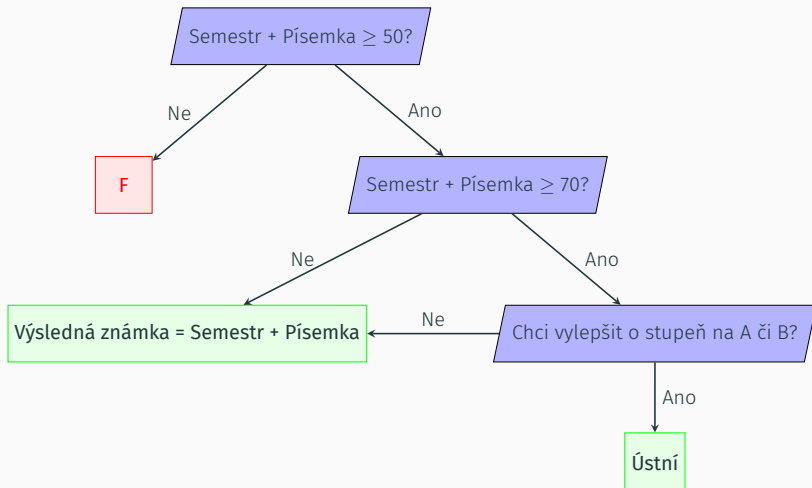
Obsah kurzu:

- 1 Komplexní analýza
- 2 Transformace (Fourierova transformace, Laplaceova transformace a Z-transformace)

Upozornění

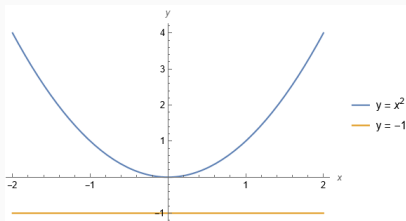
Nezaspěte začátek a nenechte si ujet vlak. Vše na sebe navazuje...

Určení výsledné známky



Imaginární nevždy znamená smyšlené

- Víme, že rovnice $x^2 = -1$ nemá v oboru reálných čísel řešení.
- Říct, že řešením je jistý imaginární prvek i splňující $i^2 = -1$, může působit uměle:



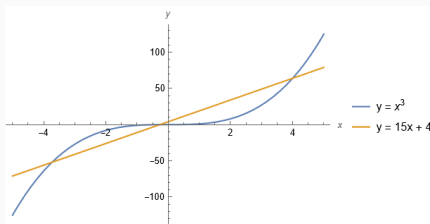
Otázka

Co ale např. kubická rovnice $x^3 = 15x + 4$?

- Existují tzv. Cardanovy vzorce pro řešení kubické rovnice $x^3 = px + q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

- Co když $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$? Např. pro $x^3 = 15x + 4$ to nastává, ale:



Poučení

Reálné problémy často vyžadují komplexní metody.

Definice (neformální)

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu dvojčlenů $x + yi$, kde x, y jsou reálná čísla, se kterými počítáme jako s reálnými dvojčleny za využití pravidla $i^2 = -1$.

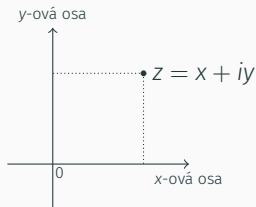
Množinu komplexních čísel značíme symbolem $\mathbb{C}$.

- Prvek i se nazývá **imaginární jednotka**.
- Terminologie a značení:
 - $z = x + iy$ **algebraický tvar** komplexního čísla z .
 - x **reálná část** komplexního čísla z . Píšeme $\operatorname{Re} z = x$.
 - y **imaginární část** komplexního čísla z . Píšeme $\operatorname{Im} z = y$.
- Ztotožňujeme $x = x + 0i$ a $i = 1i$.

Upozornění

Reálná i imaginární část komplexního čísla **jsou reálná čísla!**

Geometrická interpretace komplexních čísel



Poučení

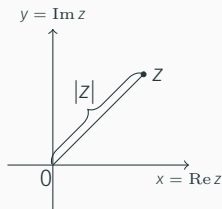
Reálná a imaginární část komplexního čísla jsou kartézské souřadnice bodu v rovině.

- Zatímco body/(uspořádané dvojice) z $\mathbb{R}^2$ neumíme násobit, struktura komplexních čísel je o násobení obohacena.
- Tento „drobný detail“ má velmi podstatné důsledky.

Velikost (absolutní hodnota) komplexního čísla

Definice

Velikost (nebo také **absolutní hodnota** či modul) komplexního čísla $z = x + iy$ je nezáporné reálné číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

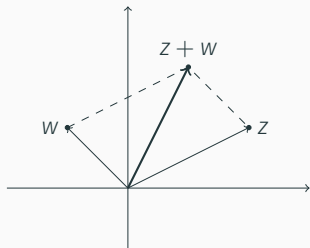


- $|z|$... vzdálenost čísla z od počátku
- $\sqrt{x^2 + y^2}$... vzdálenost bodu (x, y) od počátku
- $z = 0$ právě tehdy, když $|z| = 0$.

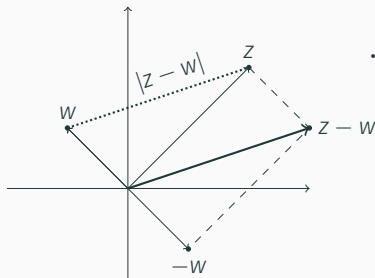
Upozornění

Nedefinujeme uspořádání komplexních čísel! Můžeme porovnávat velikosti komplexních čísel, nikoliv ale komplexní čísla mezi sebou.

Geometrický význam sčítání, vzdálenost komplexních čísel



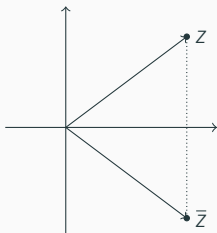
- $z + w = (z_1 + w_1) + i(z_2 + w_2)$ pro $z = z_1 + iz_2$ a $w = w_1 + iw_2$
- $z \mapsto z + w$
posun (z_1, z_2) v rovině o (w_1, w_2)



- $|z - w| = \sqrt{(z_1 - w_1)^2 + (z_2 - w_2)^2}$
vzdálenost mezi $z \in \mathbb{C}$ a $w \in \mathbb{C}$

Definice

Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Komplexní číslo $\bar{z} = x - iy$ se nazývá **komplexně sdruženým číslem** k číslu z .



- $z \mapsto \bar{z}$... zrcadlení kolem reálné osy
- $|z| = |\bar{z}|$

Příklad

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $z\bar{z} = |z|^2$.

Dělení komplexních čísel

Otázka

Umíme násobit dvě komplexní čísla. Co by mělo být $\frac{w}{z}$ pro $z \neq 0$?

- $\frac{w}{z} = w \frac{1}{z}$
- Inverzní prvek $z^{-1} = \frac{1}{z}$ je definován rovností $z^{-1}z = 1$.
 - pro $z = 0$ inverzní prvek $z^{-1} \in \mathbb{C}$ neexistuje;
 - pro $z \neq 0$ je $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- Odtud pro $z \neq 0$ dostaneme: $\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$.

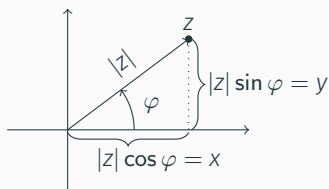
Příklad

Nechť $w = 5 - i$ a $z = 1 + 2i$.

- 1 $w - z = 4 - 3i$, $\overline{w - z} = 4 + 3i$ a $|w - z| = 5$;
- 2 $\frac{w}{z} = \frac{3}{5} - \frac{11}{5}i$, $\operatorname{Re} \frac{w}{z} = \frac{3}{5}$ a $\operatorname{Im} \frac{w}{z} = -\frac{11}{5}$.

Goniometrický tvar komplexního čísla

Nechť $z = x + iy$ je nenulové komplexní číslo.



- $\varphi \in \mathbb{R}$ orientovaný úhel
- $(x, y) = (|z| \cos \varphi, |z| \sin \varphi)$
- polární souřadnice bodu (x, y)

Poučení

Vyjádření

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ kde } \varphi \in \mathbb{R},$$

nazýváme **goniometrický tvar** čísla $z \neq 0$.

Upozornění

Orientovaný úhel $\varphi \in \mathbb{R}$ není jednoznačný. Můžeme totiž „obíhat“ dokola či v opačném směru.

Exponenciální tvar komplexního čísla

Otázka

Jak lze zapsat $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ úsporněji?

- Nejspíše jste již někde viděli tzv. Eulerův vzorec:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \text{ kde } \varphi \in \mathbb{R}.$$

- Pomocí něj lze goniometrický tvar komplexního čísla zapsat mnohem úsporněji jako:

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}.$$

Poučení

Vyjádření

$$z = |z|e^{i\varphi}, \text{ kde } \varphi \in \mathbb{R},$$

nazýváme **exponenciální tvar** čísla $z \neq 0$.

Množina argumentů a hlavní hodnota argumentu

Definice

Mějme nenulové $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$.

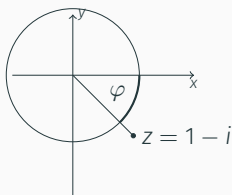
- 1 Libovolné takové $\varphi \in \mathbb{R}$ nazýváme **argument** čísla z .
- 2 Množinu $\text{Arg } z = \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}\}$ nazýváme **množina všech argumentů** čísla z .
- 3 Jediné $\varphi \in \text{Arg } z$ splňující navíc $(-\pi, \pi]$ nazýváme **hlavní hodnota argumentu** čísla z . Toto jedno φ značíme $\arg z$.

Příklad

Mějme $z = -1 + i$.

- 1 $|z| = \sqrt{2}$, $\text{Arg } z = \{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ a $\arg z = \frac{3\pi}{4}$.
- 2 $z = \sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i \sin(\frac{3\pi}{4})) = \sqrt{2}e^{\frac{11}{4}\pi i} = \sqrt{2}e^{-\frac{5}{4}\pi i} = \dots$

Pro jistotu ještě jednou



Hodnotu φ z obrázku nevidíme.

$$\varphi = \frac{7\pi}{4}? \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}? \quad \varphi = \frac{31\pi}{4}?$$

Ovšem vidíme, že $\arg z = -\frac{\pi}{4}$.

Poučení

Nenulové komplexní číslo má **nekonečně mnoho argumentů**.
Ovšem má ale pouze **jednu jedinou hlavní hodnotu argumentu**,
která leží **v intervalu $(-\pi, \pi]$** .

Tvrzení (O rovnosti komplexních čísel)

Nechť $z, w \in \mathbb{C}$ jsou nenulová. Nechť $\varphi \in \text{Arg } z$ a $\psi \in \text{Arg } w$. Potom $z = w$ právě tehdy, když

$$|z| = |w| \quad \text{a zároveň} \quad \psi = \varphi + 2k\pi \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{Z}.$$

Poučení

Velikosti stejné, ale dva „náhodné“ argumenty se mohou lišit o celočíselný násobek 2π .

Geometrický význam násobení

- Mějme nenulová $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ a $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$.
- Za použití součtových vzorců můžeme ověřit:

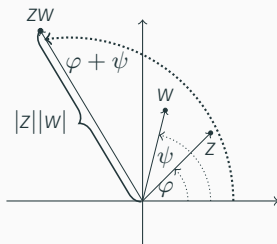
$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)$$

- A tedy:

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) = |z||w|e^{i(\varphi + \psi)}$$

Poučení

Úhly se sčítají a velikosti násobí.



- $|zw| = |z||w|$
- $\varphi + \psi \in \text{Arg}(zw)$
- **Nemusí ale být** $\varphi + \psi = \arg(zw)$.

Moivreova věta

Tzv. Moivreova věta by teď už pro nás neměla být překvapením.

Věta (Moivreova věta)

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ platí

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi).$$

Stručněji:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

Příklad

Uvažme rovnici $z^4 = -2$. Množina všech jejích řešení je

$$\begin{aligned} & \left\{ \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)} : k = 0, 1, 2, 3 \right\} = \\ & \left\{ \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right) \right) : k = 0, 1, 2, 3 \right\} \end{aligned}$$

Základní identity

Tvrzení (Základní identity)

Nechť $z, w \in \mathbb{C}$. Potom

- 1 $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ a $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$;
- 2 $\bar{\bar{z}} = z$;
- 3 $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- 4 $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$;
- 5 $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, kdykoli $w \neq 0$;
- 6 $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$
- 7 $|z| = |\bar{z}|$;
- 8 $|zw| = |z| |w|$;
- 9 $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, kdykoliv $w \neq 0$.

Rozšířená komplexní rovina

- Existuje také tzv. rozšířená komplexní rovina (a s ní souvisí pojem Riemannova sféra), která vznikne rozšířením komplexní roviny o jeden „nevlastní bod“.
- Tento jeden prvek má interpretaci „komplexního nekonečna“.
- My se ale obejdeme bez toho.

Upozornění

V komplexní analýze nemáme $+\infty$ a $-\infty$ jako v reálné analýze.