

Komplexní analýza

Komplexní funkce komplexní proměnné

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Reálná a imaginární část funkce

- Komplexní funkce komplexní proměnné je zobrazení $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, kde $D \subseteq \mathbb{C}$.
- Protože $f(z) \in \mathbb{C}$ pro každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$, můžeme psát

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

kde u, v jsou reálné funkce dvou reálných proměnných.

Definice

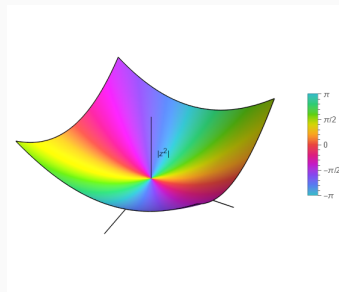
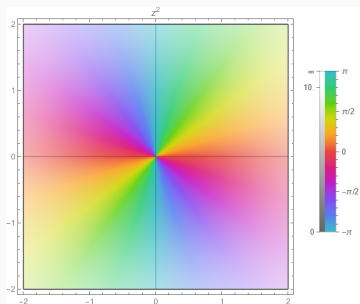
- Reálnou funkci u jako výše nazýváme **reálná část funkce f** .
Píšeme $\operatorname{Re} f = u$.
- Reálnou funkci v jako výše nazýváme **imaginární část funkce f** .
Píšeme $\operatorname{Im} f = v$.

Upozornění

Reálná i imaginární část funkce jsou reálné funkce.

Příklad

Uvažme funkci $f(z) = z^2$. Reálná část funkce f je $u(x, y) = x^2 - y^2$ a imaginární část je $v(x, y) = 2xy$.



Okolí bodu, otevřené množiny a oblasti

„Blízká komplexní čísla jsou blízké body v rovině.“

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $\varepsilon > 0$.

- Množinu $U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ nazýváme **okolí bodu** z_0 s poloměrem ε .
- Množinu $P(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ nazýváme **prstencové okolí bodu** z_0 s poloměrem ε .

Poučení

$U(z_0, \varepsilon)$ je otevřený kruh se středem v z_0 a poloměru ε .

$P(z_0, \varepsilon)$ je $U(z_0, \varepsilon)$ bez svého středu.

Úmluva

Stručněji budeme psát jen $U(z_0)$ a $P(z_0)$, pokud nás přesný poloměr (prstencového) okolí nezajímá.

Definice

Množina $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je:

- **otevřená**, jestliže pro každé $z \in \Omega$ existuje $U(z)$ tak, že $U(z) \subseteq \Omega$;
- **oblast**, jestliže je otevřená a každé dva body z množiny Ω lze spojit lomenou čarou ležící v Ω .

Příklad

- 1 $\mathbb{C}$, $\emptyset$, $U(z)$ a $P(z)$ (pro každé $z \in \mathbb{C}$) jsou oblasti.
- 2 $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ je oblast.
- 3 Je-li $G \subseteq \mathbb{C}$ oblast/otevřená, pak také $G \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ je oblast/otevřená pro každé $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.
- 4 $U(i, 1) \cup U(-i, 1)$ je otevřená, ale není to oblast.

- Další pojmy jako hranice, uzávěr, uzavřené množiny... a vztahy mezi nimi jsou stejné jako v $\mathbb{R}^2$.

I pojem limity a spojitosti je jako u funkcí dvou reálných proměnných.

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je komplexní funkce definovaná na $P(z_0)$.

Řekneme, že f **má limitu** $L \in \mathbb{C}$ v bodě z_0 , jestliže ke každému okolí $U(L)$ existuje prstencové okolí $P(z_0)$ takové, že pro každé $z \in P(z_0)$ platí $f(z) \in U(L)$. Píšeme $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$.

- Limita je jednoznačná, pokud existuje.
- Mějme $z_0 = x_0 + iy_0$ a $L = A + Bi$. Platí $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ právě tehdy, když

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = A \quad \text{a} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = B,$$

kde $u = \operatorname{Re} f$ a $v = \operatorname{Im} f$.

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je komplexní funkce definovaná na $U(z_0)$.

Řekneme, že f je **spojitá v bodě** z_0 , jestliže $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Řekneme, že f je **spojitá na množině** $M \subseteq \mathbb{C}$, jestliže je spojitá v každém bodě množiny M .

- $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je spojitá právě tehdy, když obě $u(x, y)$ a $v(x, y)$ jsou spojitě (jako reálné funkce reálných proměnných).

Příklad

Konstantní funkce, polynomy, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$ a $|z|$ jsou spojitě funkce na $\mathbb{C}$.

Otázka

A proč to tedy děláme, když je všechno prakticky stejné jako u funkcí dvou reálných proměnných?

Upozornění

U pojmu **derivace** začínají **zásadní odlišnosti** od reálné analýzy.

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je definovaná na $U(z_0)$. Pokud existuje vlastní limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme **derivací** funkce f v bodě z_0 . Značíme ji $f'(z_0)$ nebo $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Existuje-li $f'(z_0)$, pak říkáme, že f je **diferencovatelná** v bodě z_0 .

- Diferenční podíl má smysl, protože komplexní čísla můžeme na rozdíl od prvků $\mathbb{R}^2$ dělit.

- Jelikož aritmetika limit je stejná jako v reálném oboru, platí i stejná aritmetika derivací.
- Jsou-li f a g diferencovatelné v bodě $z \in \mathbb{C}$, pak
 - ① $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$;
 - ② $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
 - ③ $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, je-li navíc $g(z) \neq 0$.
- Je-li g diferencovatelná v bodě $z \in \mathbb{C}$ a f diferencovatelná v bodě $g(z)$, pak
 - ④ $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$.

Příklad

Uvažme funkci $f(z) = z^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $z \in \mathbb{C}$ je

$$f'(z) = nz^{n-1}.$$

- Diferencovatelnost implikuje spojitost.

Věta (Cauchyovy-Riemannovy podmínky)

Je-li funkce $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ diferencovatelná v bodě $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, pak v bodě z_0 splňuje tzv. **Cauchyovy-Riemannovy podmínky**:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Navíc platí, že

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Věta (O postačitelnosti Cauchyovo-Riemannovo podmínek)

Nechť funkce $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ splňuje v bodě $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ Cauchyovy-Riemannovy podmínky. Nechť dále funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají v bodě (x_0, y_0) diferenciál. Potom je funkce $f(z)$ diferencovatelná v bodě z_0 .

Příklad

- 1 Funkce $f(z) = \operatorname{Re} z$ je spojitá na $\mathbb{C}$, ale není diferencovatelná v žádném bodě $z \in \mathbb{C}$.
- 2 Funkce $f(z) = |z|^2$ je spojitá na $\mathbb{C}$, ale je diferencovatelná pouze v bodě $z = 0$, kde platí $f'(0) = 0$.

Upozornění

I na první pohled „pěkné a rozumné“ funkce často nejsou v komplexní analýze diferencovatelné.

Holomorfní funkce

Definice

Řekneme, že funkce f je **holomorfní na otevřené množině** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, jestliže je diferencovatelná v každém bodě množiny Ω .

Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá **celistvá**.

Příklad

- 1 Polynom $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, kde $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}_0$, je celistvá funkce.
- 2 Racionální funkce $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, kde P, Q jsou polynomy a $Q \not\equiv 0$, je holomorfní funkce na svém definičním oboru $D = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.
- 3 Naopak funkce $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ či $|z|^2$ nejsou holomorfní na žádné otevřené podmnožině $\mathbb{C}$.

Harmonické funkce

Holomorfní funkce úzce souvisí s tzv. harmonickými funkcemi, které možná znáte z fyziky (např. elektrostatiky).

Definice

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Řekneme, že reálná funkce Φ definovaná na Ω je **harmonická** na Ω , jestliže Φ má spojitě druhé parciální derivace na Ω a $\Delta\Phi(x, y) = 0$ pro každé $(x, y) \in \Omega$.

Symbol Δ je Laplaceův operátor, tj. $\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$.

Příklad

Uvažme celistvou funkci $f(z) = z^2$. Její reálná část $u(x, y) = x^2 - y^2$ a imaginární část $v(x, y) = 2xy$ jsou harmonické na $\mathbb{R}^2$.

Upozornění

Součet druhých nesmíšených parciálních derivací musí být **konstantně nulový v každém bodě** Ω .

Předchozí příklad nebyl náhoda.

Tvrzení

Nechť f je holomorfní na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Potom reálná a imaginární část funkce f jsou harmonické funkce na Ω .

Příklad

Je dána funkce $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Funkce u je harmonická na $\mathbb{R}^2$.
 - Všechny funkce v na $\mathbb{R}^2$ takové, že $f = u + iv$ je celistvá, jsou tvaru $v(x, y) = 2xy + y + K$, kde K je libovolná reálná konstanta.
-
- Funkce v jako výše se nazývá *harmonicky sdružená funkce* k u .
 - Obecně nemusí existovat k zadané harmonické funkci harmonicky sdružená funkce, ale na tzv. jednoduše souvislých oblastech (bude později) vždy existuje.