

Komplexní analýza

Elementární funkce

Zdeněk Mihula

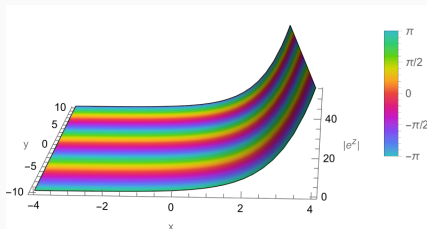
Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Exponenciála

Pro $x, y \in \mathbb{R}$ známe e^x a víme, co značí e^{iy} . Chceme $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$.

Definice

Komplexní funkce $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se nazývá **exponenciální funkce** (krátce **exponenciála**).



Příklad

$\operatorname{Re}(e^{5+4i}) = e^5 \cos 4$, $\operatorname{Im}(e^{5+4i}) = e^5 \sin 4$ a $|e^{5+4i}| = e^5$.

Exponenciála v komplexním vs. v reálném oboru

Tvrzení

Mějme $z, w \in \mathbb{C}$.

- 1 Platí $e^z = e^w$ právě tehdy, když $w = z + 2k\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.
- 2 $|e^z| = e^x$, kde $x = \operatorname{Re} z$
- 3 $e^z \neq 0$

Poučení

Exponenciála je v komplexním oboru **$2\pi i$ -periodická funkce**. Velikost exponenciály závisí pouze na reálné části vstupu.

Tvrzení

Exponenciála je celistvá funkce a platí $(e^z)' = e^z$ pro každé $z \in \mathbb{C}$.

Další základní vlastnosti

Další základní vlastnosti exponenciály, které nás asi moc nepřekvapí.

① $e^{z+w} = e^z e^w$

② $e^z \neq 0$

③ $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

④ $(e^z)^n = e^{nz}$ pro $n \in \mathbb{Z}$

⑤ $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

Eulerova identita $e^{i\pi} + 1 = 0$ je známá.

MoneyBART (2010)



Otázka

A co goniometrické funkce v komplexním oboru?

Z Eulerova vzorce pro $x \in \mathbb{R}$ plyne

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Definice

Komplexní funkce $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $z \in \mathbb{C}$, se nazývá **sinus**. Komplexní funkce $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$, se nazývá **kosinus**.

Tvrzení

Funkce $\sin z$ a $\cos z$ jsou celistvé. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $(\sin z)' = \cos z$ a $(\cos z)' = -\sin z$.

Příklad

$$\cos(2i) = \frac{e^{-2} + e^2}{2} \text{ a } |\cos(2i)| > 3.$$

Otázka

Vidíte něco překvapivého?

Příklad

- 1 $\sin z = 0$ právě tehdy, když $z = k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.
- 2 $\cos z = 0$ právě tehdy, když $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

Nulové body v komplexním oboru jsou tedy stejné jako v reálném.

- Obecněji, množina řešení rovnice $\sin z = a$, kde $a \in [-1, 1]$, v komplexním oboru je stejná jako v reálném oboru. Stejně pro $\cos z = a$.
- Platí analogické identity jako v reálném oboru ($\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, součtové vzorce, ...).

Příklad

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Komplexní číslo w je řešením rovnice $e^w = z$ právě tehdy, když $w = \ln |z| + i\varphi$ pro $\varphi \in \text{Arg} z$.

Otázka

Jaký ze všech možných argumentů $\varphi \in \text{Arg} z$ vybrat?

- To záleží, co chceme dělat. Ale jeden z nich je hlavní.

Definice

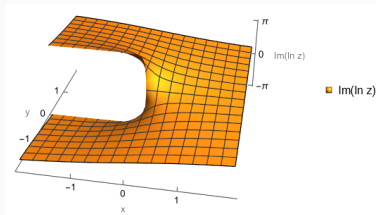
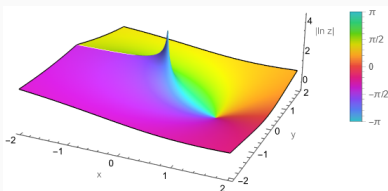
Komplexní funkci $\ln z$ definovanou pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jako $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ nazýváme **hlavní hodnotou logaritmu**.

- Dává smysl zavést množinu všech logaritmů čísla $z \neq 0$ jako
$$\text{Ln} z = \{\ln z + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Příklad

$\ln(1) = 0$, $\ln(-1) = i\pi$, $\ln(2i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$.

Logaritmus a nekladná reálná osa



Tvrzení

Komplexní funkce $\ln z$ je holomorfní na

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$$

a pro každé $z \in \Omega$ platí $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

V bodech množiny $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ funkce $\ln z$ není spojitá, a tedy ani diferencovatelná.

Pozor na logaritmus

Příklad

Pro $z = w = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ je $\ln(zw) = -\frac{\pi}{2}i \neq \frac{3\pi}{2}i = \ln z + \ln w$.

Upozornění

Obecně **neplatí** $\ln(zw) = \ln z + \ln w$, **ani** $\ln(z^n) = n \ln(z)$.

Poučení

Vzorečky pro logaritmus, které znáte z reálné analýzy, tedy raději nepoužívejte, nejedná-li se o kladná reálná čísla.

Příklad

$\ln(e^{2\pi i}) = 0 \neq 2\pi i$.

Upozornění

Platí $e^{\ln z} = z$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, **ale** obecně **neplatí** $\ln e^z = z$.