

Komplexní analýza

Laurentovy řady a izolované singularity

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Mocninné řady nestačí

Uvažme funkci $f(z) = \frac{1}{z(2-z)}$, která je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$.

- Funkci $f(z)$ nelze rozvinout do *mocninné řady* se středem $z_0 \in \{0, 2\}$, byť okolo bodů 0 a 2 je její chování nejzajímavější.
- Situace se změní, pokud si umožníme záporné exponenty a jiné obory konvergence než kruhy.
- Např.

$$\frac{1}{z(2-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} + \frac{z}{8} + \frac{z^2}{16} + \dots \quad \text{pro } 0 < |z| < 2$$

nebo

$$\frac{1}{z(2-z)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+2}} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3} - \frac{4}{z^4} - \dots \quad \text{pro } |z| > 2.$$

- Později uvidíme, že takovéto rozvoje jsou důležité (reziduová věta, inverzní Z-transformace, ...).

Definice

- Řada tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

kde $z \in \mathbb{C}$ je komplexní proměnná, se nazývá **Laurentova řada** se středem $z_0 \in \mathbb{C}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{C}$.

- Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ se nazývá **regulární část** Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.
 - Řada $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$ se nazývá **hlavní část** Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.
- z_0 ...střed Laurentovy řady
 - a_n ...koeficienty Laurentovy řady

Konvergence Laurentovy řady

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $M \subseteq \mathbb{C}$. Řekneme, že Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ **konverguje na M** (resp. **konverguje absolutně na M**), jestliže v každém bodě množiny M konverguje (resp. konverguje absolutně) současně její hlavní a regulární část. Konverguje-li Laurentova řada na M , potom funkci

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in M,$$

nazýváme **součtem** Laurentovy řady na M . Součet je pro $z \in M$ definován jako

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Nekladné mocniny a záporné mocniny zvlášť

Poučení

Regulární část Laurentovy řady je mocninná řada. Speciálně, obsahuje pouze nezáporné mocniny ($z - z_0$).

- regulární = “bez problémů”

Poučení

Hlavní část Laurentovy řady obsahuje záporné mocniny ($z - z_0$). Není to tedy mocninná řada, ale součet racionálních funkcí.

Otázka

Víme, že mocninné řady konvergují na kruzích. Kde konvergují Laurentovy řady?

Definice

Nechť $0 \leq r < R \leq +\infty$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Množina

$$P(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

se nazývá **mezikruží** o středu z_0 , vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R .

Tvrzení (Konvergence Laurentovy řady)

Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ je Laurentova řada. Pak existují jednoznačné $r, R \in [0, +\infty]$ takové, že

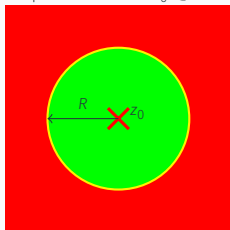
- 1 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konverguje absolutně pro $|z - z_0| < R$ a diverguje pro $|z - z_0| > R$;
- 2 $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$ konverguje absolutně pro $|z - z_0| > r$ a diverguje pro $|z - z_0| < r$.

Je-li $r < R$, pak $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konverguje absolutně na $P(z_0, r, R)$ a její součet je holomorfní funkce na tomto mezikruží.

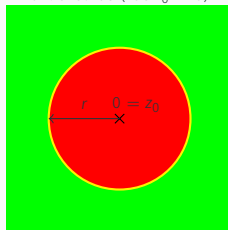
• $P(z_0, r, R)$ z tvrzení ...**mezikruží konvergence** Laurentovy řady

Tři druhy mezikruží

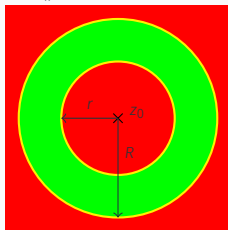
$0 = r < R \leq \infty$
prstencové okolí $z_0 \in \mathbb{C}$



$0 \leq r < R = \infty$
tzv. okolí ∞ (zde $z_0 = 0$)



$0 < r < R < \infty$
„skutečné mezikruží“



Věta (Existence rozvoje do Laurentovy řady)

Nechť f je holomorfní funkce na mezikruží $P(z_0, r, R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leq r < R \leq +\infty$. Potom existuje právě jedna Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ taková, že

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{pro } z \in P(z_0, r, R).$$

- Laurentova řada z předchozí věty se nazývá **Laurentův rozvoj** funkce f na $P(z_0, r, R)$.

Příklad

Laurentův rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ na maximálním prstencovém okolí bodu 1 je

$$\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^{n-1} \quad \text{na } P(1, 0, 1).$$

- Je-li $R > 0$, pak $P(z_0, 0, R)$ je prstencové okolí bodu z_0 , tj. $P(z_0, 0, R) = P(z_0, R)$.

Příklad

① $\frac{e^z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ na $P(0, 0, \infty)$.

② $\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ na $P(0, 0, 1)$.

③ $\frac{1}{z(1-z)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$ na $P(0, 1, \infty)$.

- 2. příklad je rozvoj funkce do Laurentovy řady na prstencovém okolí bodu.
- 3. příklad je tzv. rozvoj funkce do Laurentovy řady na okolí ∞ . Rozvoje na okolí ∞ budeme potřebovat později u (inverzní) Z-transformace.
- 1. příklad je zároveň rozvoj na prstencovém okolí 0 i na okolí ∞ .

Izolované singularity

Definice

Řekneme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ je **izolovaná singularita** funkce f , jestliže f je holomorfní na nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$ bodu z_0 a v bodě z_0 nemá derivaci.

Příklad

- 1 Funkce $\frac{\sin z}{z}$ má izolovanou singularitu v 0.
- 2 Funkce $\frac{1}{(z-2)^{10}(1+z^2)^{20}}$ má izolované singularity v i , $-i$ a 2.
- 3 Funkce $e^{\frac{1}{z}}$ má izolovanou singularitu v 0.
- 4 Funkce $\ln z$ nemá izolovanou singularitu v 0.

Otázka

Lze nějak klasifikovat „jak špatná“ je izolovaná singularita? Je izolovaná singularita funkce $e^{\frac{1}{z}}$ v 0 „horší“ než ta funkce $\frac{\sin z}{z}$?

Tři možnosti, jak může vypadat Laurentův rozvoj na $P(z_0)$

- 1 Žádné záporné mocniny $(z - z_0)$:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad z \in P(z_0)$$

- 2 Konečně mnoho záporných mocnin $(z - z_0)$:

$$f(z) = \frac{\overbrace{a_{-k}}^{\neq 0}}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad z \in P(z_0)$$

- 3 Nekonečně mnoho záporných mocnin $(z - z_0)$:

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad z \in P(z_0)$$

Klasifikace izolovaných singularit

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f a $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ na $P(z_0)$. Řekneme, že z_0 je:

- 1 **odstranitelná singularita**, jestliže $a_n = 0$ pro každé $n < 0$;
- 2 **pól**, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{-k} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -k$. Číslo k se nazývá **řád** (nebo také **násobnost**) pólu;
- 3 **podstatná singularita**, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných celých čísel n .

- Pól řádu k se také nazývá **k -násobný pól**.
- Pól řádu 1 se také nazývá **jednoduchý pól**.

Poučení

- *odstranitelná*: Singularita je jen zdánlivá, lze ji odstranit.
- *pól řádu k* : Funkce se blízko z_0 chová jako $\frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$.
- *podstatná*: Funkce se blízko z_0 chová velmi divoce.

Příklad

- 1 Funkce $\frac{\sin z}{z}$ má v 0 odstranitelnou singularitu.
- 2 Funkce $\frac{1}{(z-2)^5}$ má v 2 pól řádu 5.
- 3 Funkce $e^{\frac{1}{z}}$ má v 0 podstatnou singularitu.
- 4 Funkce $f(z) = -\frac{1}{9(z-i)^4} + \sum_{n=-2}^{\infty} 3^n (z-i)^{2n}$, $z \in P(i)$, má v i pól řádu 2.

Poučení

Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj funkce na prstencovém okolí izolované singularity, snadno ji můžeme klasifikovat.

Otázka

Co když ale rozvoj nemáme a nechce se nám hledat? Např. pro funkci $\frac{1}{(z-2)^{10}(1+z^2)^{20}}$ by se nám hledat rozvoje na prstencových okolicích 2, i a $-i$ jistě nechtělo.

Kořeny funkce a jejich násobnosti

Příklad

Mějme funkci $f(z) = (z - 1)^2$. Polynom $(z - 1)^2$ má v 1 dvojnásobný kořen. Platí $f(1) = f'(1) = 0$, ale $f''(1) \neq 0$.

- Obecněji, polynom $P(z) = (z - z_0)^k$, kde $k \in \mathbb{N}_0$ a $z_0 \in \mathbb{C}$, má v z_0 kořen násobnosti k a platí $P(z_0) = P'(z_0) = \dots = P^{(k-1)}(z_0) = 0$ a $P^{(k)}(z_0) \neq 0$.
- To je motivace, jak zadefinovat násobnost kořene obecné holomorfní funkce.

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní a ne všude nulová na $U(z_0)$.

Řekneme, že f má v z_0 **kořen násobnosti** $k \in \mathbb{N}_0$, jestliže $f(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ a $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Také říkáme, že z_0 je k -násobný kořen.

- Z algebry víme, že z_0 je k -násobný kořen polynomu $P(z)$ právě tehdy, když $P(z) = (z - z_0)^k Q(z)$, kde $Q(z)$ je polynom takový, že $Q(z_0) \neq 0$.

Tvrzení

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní funkce na okolí $U(z_0)$. Pak z_0 je k -násobný kořen právě tehdy, když existuje holomorfní funkce g na $U(z_0)$ taková, že $g(z_0) \neq 0$ a pro všechna $z \in U(z_0)$ platí $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$.

Tvrzení (Násobnost kořene součinu)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a f, g jsou holomorfní funkce na okolí $U(z_0)$. Je-li z_0 k -násobný kořen funkce f a l -násobný kořen funkce g , potom z_0 je $(k + l)$ -násobný kořen funkce $h(z) = f(z)g(z)$.

Příklad

Funkce $f(z) = z^{50}(1 - \cos z)^2$ má v 0 kořen násobnosti 54.

Póly a odstranitelné singularity

Tvrzení ((odstranitelné singularity)/póly a násobnost kořenů)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f a g jsou holomorfní na okolí $U(z_0)$. Jestliže f má v z_0 kořen násobnosti $m \in \mathbb{N}_0$ a g má v z_0 kořen násobnosti $n \in \mathbb{N}$, potom funkce $\frac{f}{g}$ má v bodě z_0

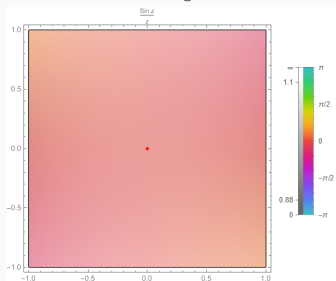
- odstranitelnou singulárity, jestliže $m \geq n$;
- pól řádu $n - m$, jestliže $m < n$.

Příklad

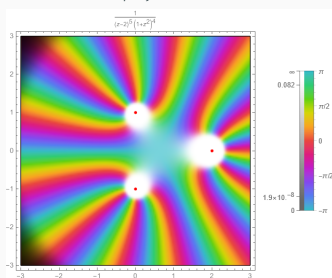
- 1 $\frac{1}{(z-2)^{10}(1+z^2)^{20}}$ má v 2 pól řádu 10 a v bodech $\pm i$ póly řádu 20.
- 2 $\frac{(1-\cos z) \sin z}{z^3}$ má v 0 odstranitelnou singulárity.
- 3 $\frac{\sin z - z}{(1-e^{iz})^3}$ má trojnásobné póly v bodech $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. V bodě 0 má odstranitelnou singulárity.

Ilustrace chování funkce v blízkosti izolovaných singularit

odstranitelná singularita



póly



podstatná singularita

