

Komplexní analýza

Reziduum a reziduová věta

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

- Mějme funkci $f(z)$, která má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitu. Tedy $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ pro $z \in P(z_0)$.

Příklad

Je-li C kladně orientovaná kružnice se středem v z_0 ležící uvnitř $P(z_0)$ a f jako výše, pak platí

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}.$$

- Hodnota $\int_C f(z) dz$ je tedy zakódována v jednom jediném čísle, a to v koeficientu u $(z - z_0)^{-1}$ v Laurentově rozvoji funkce $f(z)$ na $P(z_0)$.

Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce $f(z)$ a uvažme Laurentův rozvoj $f(z)$ na $P(z_0)$, tj. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ pro $z \in P(z_0)$. Koeficient a_{-1} se nazývá **reziduum** funkce f v bodě z_0 a značí se $\operatorname{res}_{z_0} f$.

Příklad

① $\operatorname{res}_0 \frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{2}$.

② $\operatorname{res}_1 \left(\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{5}{(z-1)^2} + 8(z-1) \right) = 0$.

Upozornění

Reziduum v izolované singularitě je vždy dobře definováno a je to (konečné) číslo. **Nemůže se stát**, že „neexistuje“ nebo že vyjde ∞ .

Výpočet rezidua

- Známe-li Laurentův rozvoj na $P(z_0)$, reziduum v z_0 snadno určíme.

Otázka

Jak spočítat reziduum, neznáme-li Laurentův rozvoj na $P(z_0)$?

Tvrzení (Reziduum v odstranitelné singularitě)

Nechť má funkce $f(z)$ v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ odstranitelnou singularitu. Potom $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$.

Upozornění

Opačná implikace ale **neplatí**. Viz 2. příklad na 3. slajdu.

Tvrzení (Výpočet rezidua v pólu)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól řádu $k \in \mathbb{N}$ funkce f . Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)}.$$

- Speciálně:

- je-li z_0 jednoduchý pól, pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$;
- je-li z_0 pól řádu 2, pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^2 f(z)]'$.

Příklad

① $\operatorname{res}_{-1} \frac{1}{(z-1)(z+1)^3} = -\frac{1}{8}.$

② $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^2} = 1.$

„Dosazovací metoda“, jednoduchý kořen jmenovatele

Tvrzení („dosazovací metoda“)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce f a g jsou holomorfní na $U(z_0)$. Jestliže g má v z_0 *jednoduchý kořen*, potom

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Příklad

$$\operatorname{res}_{\pi} \frac{\cos(z - \pi)}{z(1 + e^{iz})} = \frac{i}{\pi}.$$

Upozornění

Nelze použít pro vícenásobné kořeny jmenovatele..

Chybné použití v případě vícenásobných kořenů typicky vede k chybám, před kterými již bylo varováno na 3. slajdu...

Reziduová věta

- Připomeňme si, že již víme z 2. slajdu, že má-li funkce $f(z)$ izolovanou singularitu v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a C je kladně orientovaná kružnice se středem v z_0 ležící uvnitř $P(z_0)$, pak

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} f(z).$$

Věta (Reziduová věta)

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast, C je kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v Ω . Nechť f je holomorfní funkce na $\Omega \setminus S$, kde $S = \{z \in \operatorname{Int} C : z \text{ je izolovaná singularita funkce } f\}$, a S je konečná množina. Potom platí

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{w \in S} \operatorname{res}_w f(z).$$

Příklad

Nechť C je kladně orientovaná hranice obdélníka o vrcholech $-i$, $4 - i$, $4 + i$ a i . Potom

$$\int_C \frac{1}{(z-1)(z-3)(z-5)^2} dz = \frac{3\pi i}{16}.$$

Poučení

Započítávají se pouze rezidua v izolovaných singularitách, které leží uvnitř C .

Poučení

Na samotné křivce C nezáleží¹, relevantní je pouze to, jaké izolované singularity leží uvnitř.

¹Stále se samozřejmě bavíme o přípustných křivkách, tj. C je kladně orientovaná Jordanova křivka.

Aplikace reziduové věty, integrály přes reálnou osu

- V dalším budeme chápat integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ jako

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx,$$

tj. ve smyslu tzv. Cauchyovy hlavní hodnoty.

- V tomto smyslu je $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = 0$.
- Pokud bychom definovali takový integrál jako např.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx,$$

pak by integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ neexistoval.

- Naše pojetí ve smyslu hlavní hodnoty je v jistém smyslu obecnější a pro naše účely užitečnější.

Tvrzení (Integrály s oscilující exponenciálou)

Nechť P a Q jsou nenulové polynomy, $\text{st } Q \geq \text{st } P + 1$, a Q nemá žádný reálný kořen. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$.

- 1 Jestliže $\alpha > 0$, pak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

kde

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \text{Im } z > 0\}.$$

- 2 Jestliže $\alpha < 0$, pak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{w \in S_-} \text{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

kde

$$S_- = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \text{Im } z < 0\}.$$

- 3 Je-li $\text{st } Q \geq \text{st } P + 2$, lze 1 použít i pro $\alpha = 0$.

Upozornění

Pozor na to, jak se liší vzorec pro výpočet integrálu v závislosti na znaménku parametru α .

- Při splnění předpokladů dostáváme v případě $\alpha = 0$ vztah

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Příklad

$$1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 4x + 5} dx = \pi e^{-1+2i} = \frac{\pi \cos 2}{e} + \frac{\pi \sin 2}{e} i$$

$$2 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6}$$

$$3 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 4x + 5} dx = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 4x + 5} dx \right) = \frac{\pi \cos 2}{e}$$

$$4 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 4x + 5} dx = \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 4x + 5} dx \right) = \frac{\pi \sin 2}{e}$$

K čemu je dobré umět takové integrály efektivně spočítat?

- Nejdříve si vzpomeňme, jak bychom podobné integrály počítali metodami reálné analýzy. Odpověď je: „Dost pracně...“
- Důležitější ovšem je, že jsme se vlastně naučili, jak se efektivně dá počítat/(analyticky vyjádřit) Fourierova transformace racionální funkce, jak brzy uvidíme.