

Komplexní analýza

Komplexní tvar Fourierovy řady

Zdeněk Mihula

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
mihulzde@fel.cvut.cz

Fourierova řada v reálném tvaru, opakování

- Snaha o reprezentaci $T > 0$ periodické funkce $f(t)$ pomocí lineární kombinace harmonických kmitů.
- Konečné lineární kombinace by nám ovšem nestačily.
- Fourierova řada (v reálném tvaru) funkce $f(t): [a, a + T) \rightarrow \mathbb{C}$, která je absolutně integrovatelná, je

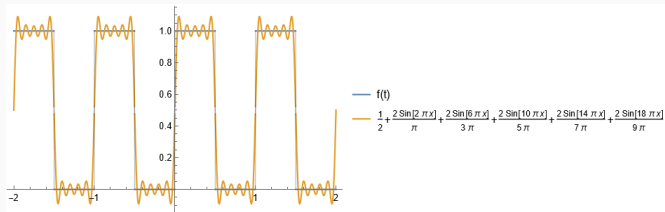
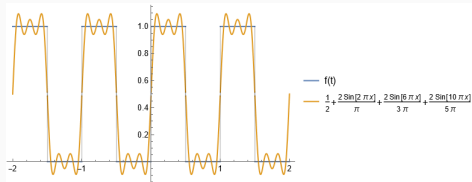
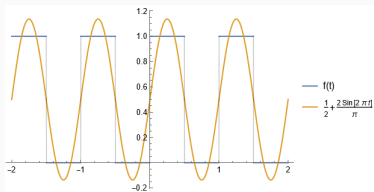
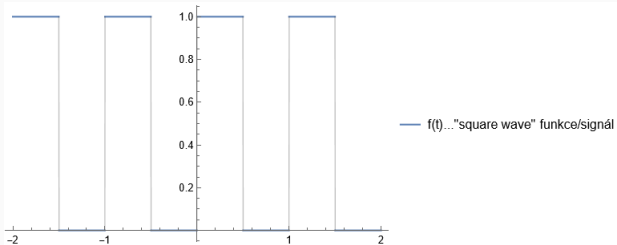
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) \right),$$

kde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) dt.$$

- Toto je tzv. **reálný tvar Fourierovy řady** a čísla a_n, b_n jsou **reálné Fourierovy koeficienty**.



- Vzpomeňme si, že

$$\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{e^{\frac{2\pi int}{T}} + e^{-\frac{2\pi int}{T}}}{2}$$

a

$$\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{e^{\frac{2\pi int}{T}} - e^{-\frac{2\pi int}{T}}}{2i}.$$

- Za pomoci těchto vztahů se snadno odvodí tzv. komplexní tvar Fourierovy řady, který má mj. tu výhodu, že je úspornější a snáze se s ním pracuje.
- První si všimneme, že

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i \cdot 0 \cdot t}{T}} dt.$$

- Dále si všimneme, že pro $M \in \mathbb{N}$ jest

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^M \left(a_n \cos \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) + b_n \sin \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) \right) \\
 &= \sum_{n=1}^M \left(a_n \frac{e^{\frac{2\pi i n t}{T}} + e^{-\frac{2\pi i n t}{T}}}{2} + b_n \frac{e^{\frac{2\pi i n t}{T}} - e^{-\frac{2\pi i n t}{T}}}{2i} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^M \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{2\pi i n t}{T}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^M \frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{2\pi i n t}{T}} + \sum_{n=-M}^{-1} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{\frac{2\pi i n t}{T}}.
 \end{aligned}$$

- A využijeme pozorování, že pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n - ib_n}{2} &= \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt \\
 \frac{a_n + ib_n}{2} &= \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{\frac{2\pi i n t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i (-n) t}{T}} dt.
 \end{aligned}$$

Komplexní tvar Fourierovy řady

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Nechť $f: [a, a + T) \rightarrow \mathbb{C}$ je absolutně integrovatelná. Její **komplexní Fourierova řada** (či **komplexní tvar Fourierovy řady**) je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}},$$

kde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt.$$

Čísla c_n se nazývají **komplexní Fourierovy koeficienty** funkce f .

- Řadu chápeme ve smyslu limity $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$.

Vztahy mezi reálnými a komplexními koeficienty

- Jest

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

a pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

- Naopak

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

- Pokud funkce f nabývá pouze reálných hodnot, potom

$$c_{-n} = \overline{c_n}.$$

V takovém případě tedy

$$a_n = 2 \operatorname{Re} c_n \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = -2 \operatorname{Im} c_n \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Bodová konvergence Fourierovy řady

Věta (Dirichletova věta)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a $f: [a, a + T] \rightarrow \mathbb{C}$. Předpokládejme, že f a f' jsou po částech spojitě funkce na $[a, a + T]$. Pak Fourierova řada funkce f konverguje k¹ $\frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)]$ v každém bodě $t \in (a, a + T)$.

Poučení

Pro „rozumné“ funkce/signály f konverguje Fourierova řada f v bodech spojitosti f k původní funkci. Ve skocích konverguje k aritmetickému průměru.

¹ $f(t+)$ a $f(t-)$ značí jednostranné limity (popořadě) zprava a zleva.