

Cvičení – Komplexní analýza 2025/2026

Cvičení 1

Úloha 1. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla z . Dále určete velikost z .

(a) $z = (3 - i)^2$

(b) $z = \frac{1+i^{11}}{1+2i}$

(c) $z = \frac{i^{12}}{(1+2i)^2}$

Úloha 2. Určete $r > 0$ a (nějaké) $\varphi \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$, kde

(a) $z = -2 + i$;

(b) $z = -1 + 3i^{43}$;

(c) $z = \frac{i^{31}}{2-i}$.

Úloha 3. Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní čísla z . Přibližně ho zakreslete do komplexní roviny. Dále určete hlavní hodnotu argumentu čísla z .

(a) $z = 5\left(\cos\left(-\frac{399}{200}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{399}{200}\pi\right)\right)$;

(b) $z = (-3 - 3i)e^{\frac{\pi}{3}i}$;

(c) $z = (5 - 5i)^{11}$.

Úloha 4. Necht' $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\varphi \in \text{Arg } z$ a $\psi \in \text{Arg } w$. Dokažte¹, že $z = w$ tehdy a jen tehdy, když $|z| = |w|$ a $\varphi = \psi + 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

Úloha 5. Nalezněte všechna řešení následujících binomických rovnic.

(a) $z^4 = 81i$

(b) $z^5 = 1$

(c) $z^2 - 2 - 2i = 0$

Pro nudící se

Úloha 6. O číslu $z \in \mathbb{C}$ víme, že leží na polopřímce $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z = \text{Im } z, \text{Re } z \leq 0, \text{Im } z \leq 0\}$ a jeho velikost je 4. Najděte algebraický tvar čísla $(-4 + 4i)z$.

Úloha 7. Pro dané $n \in \mathbb{N}$ nalezněte všechna řešení rovnice $z^n = \bar{z}$.

Úloha 8. Popište geometricky množinu všech $z \in \mathbb{C}$ splňujících

(a) $|z + 1| = 2$;

(b) $|z - 1| < 1$ a $|z| = |z - 2|$;

(c) $|z|^2 > z + \bar{z}$;

(d) $\text{Re } z = |z - 2|$.

¹Alespoň přesvědčivým obrázkem.

Komplexní čísla, úvod

Připomenutí.

- Mějme $z = x + yi$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. x je **reálná část** čísla z , y je **imaginární část** čísla z . Píšeme $\operatorname{Re} z = x$ a $\operatorname{Im} z = y$. Reálná i imaginární část jsou reálná čísla. Geometricky je z bod v rovině o souřadnicích (x, y) .
- **Velikost komplexního čísla** $z = x + yi$ je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Komplexně sdružené číslo** k číslu $z = x + yi$ je číslo $\bar{z} = x - yi$.
- Platí $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$.
- **Goniometrický tvar** komplexního čísla $z \neq 0$ je vyjádření

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

kde $\varphi \in \mathbb{R}$. Píšeme $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Označíme-li pro $\varphi \in \mathbb{R}$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{i\varphi},$$

pak můžeme psát stručněji

$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

To budeme nazývat **exponenciální tvar** komplexního čísla $z \neq 0$. Goniometrický/Exponenciální tvar není jednoznačný (je-li $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, pak také $\varphi + 2k\pi \in \operatorname{Arg} z$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$). Je-li navíc $\varphi \in (-\pi, \pi]$, říkáme, že φ je **hlavní hodnota argumentu** čísla z , a píšeme $\arg z = \varphi$.

- **Moivreova věta** říká, že pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ platí

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi).$$

Stručněji:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

- **Binomické rovnice** jsou rovnice tvaru

$$z^n = w,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jsou dána. Binomická rovnice má právě n různých řešení (v komplexním oboru). Geometricky řešení binomické rovnice tvoří vrcholy pravidelného n -úhelníku.

Výsledky

- Úloha 1: (a) $\operatorname{Re} z = 8, \operatorname{Im} z = -6, |z| = \sqrt{100}$
(b) $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{5}, \operatorname{Im} z = -\frac{3}{5}, |z| = \frac{\sqrt{10}}{5}$
(c) $\operatorname{Re} z = -\frac{3}{25}, \operatorname{Im} z = -\frac{4}{25}, |z| = \frac{1}{5}$
- Úloha 2: (a) $r = |z| = \sqrt{5}, \varphi = \frac{\pi}{2} + \arctg 2$ (toto je navíc hlavní hodnota argumentu z)
(b) $r = |z| = \sqrt{10}, \varphi = -\pi + \arctg 3 = -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{3}$ (toto je navíc hlavní hodnota argumentu z)
(c) $r = |z| = \frac{\sqrt{5}}{5}, \varphi = -\arctg 2$ (toto je navíc hlavní hodnota argumentu z)
- Úloha 3: (a) $|z| = 5$, 1. kvadrant, $\arg z = \frac{1}{200}\pi$
(b) $|z| = \sqrt{18}$, 4. kvadrant, $\arg z = -\frac{5}{12}\pi$
(c) $|z| = (\sqrt{50})^{11}$, 3. kvadrant, $\arg z = -\frac{3}{4}\pi$
- Úloha 5: (a) $z_k = 3e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})}, k = 0, 1, 2, 3$
(b) $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}}, k = 0, 1, 2, 3, 4$
(c) $z_k = \sqrt[4]{8}e^{i(\frac{\pi}{8} + k\pi)}, k = 0, 1$
- Úloha 6: $(-4 + 4i)z = 4\sqrt{32}$
- Úloha 7: Pro $n = 1$ je řešení libovolné $z \in \mathbb{R}$; pro $n > 1$ je řešení $z = 0$ a také $z_m = \cos \varphi_m + i \sin \varphi_m$, kde $\varphi_m = \frac{2m\pi}{n+1}, m = 0, 1, \dots, n$.
- Úloha 8: (a) Kružnice o středu -1 a poloměru 2 .
(b) Úsečka bez krajních bodů $1 + i$ a $1 - i$.
(c) Množina bodů ležících vně kružnice o středu 1 a poloměru 1 .
(d) Parabola o rovnici $4(x - 1) = y^2$.