

Cvičení – Komplexní analýza 2025/2026

Cvičení 2

Úloha 1. Určete reálnou $u(x, y)$ a imaginární část $v(x, y)$ funkce $f(z)$, $z = x + iy$, kde

(a) $f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{i\bar{z}};$

(b) $f(z) = |z + i|^2 + e^{z-\bar{z}}.$

Úloha 2. Určete všechny body, kde je funkce

$$f(z) = i(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2, \quad z \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná, a v těchto bodech určete $f'(z)$.

Úloha 3. Rozhodněte, zda je funkce

$$f(z) = \operatorname{Re}(z^2) + i(z + \bar{z})^2 + 2i \operatorname{Im} z, \quad z \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná v bodě $z = 1 + 4i$. Pokud ano, určete $f'(1 + 4i)$.

Úloha 4. Pro jaké hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je funkce

$$f(z) = x^2 + \alpha x + \alpha y + i(y^2 - 5\beta y + \beta x), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná v bodě $1 + 3i$. Pro tyto hodnoty parametrů určete $f'(1 + 3i)$.

Úloha 5. Rozhodněte, zda je reálná část funkce

$$f(z) = (\operatorname{Im}(z^2))^3 + i\bar{z}, \quad z \in \mathbb{C},$$

harmonická funkce.

Úloha 6. Nalezněte všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$u(x, y) = e^y \sin(\alpha x) + 3xy + x^2 y + \beta y^3, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

byla harmonická.

Pro nudící se

Úloha 7. Pro jaké hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je funkce

$$f(z) = x^2 + \alpha x + \alpha y + i(y^2 - 5y + \beta x), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

diferencovatelná na přímce $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z + 2$? Pro tyto hodnoty parametrů určete $f'(z)$ na této přímce.

Úloha 8.

Je dána funkce

$$f(z) = x(x^2 - \alpha y^2) + iy(\beta x^2 - y^2), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Nalezněte všechny hodnoty parametrů α, β tak, aby $f(z)$ byla

(a) diferencovatelná na přímce o rovnici $\operatorname{Im} z = 0$;

(b) celistvá.

Úloha 9. Je dána funkce

$$u(x, y) = x^n - y^n + e^{\alpha y} \sin(4x) - 2y,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Nalezněte všechny hodnoty parametrů $n \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby $u(x, y)$ byla harmonická funkce na $\mathbb{R}^2$.

Funkce komplexní proměnné, Cauchyovy-Riemannovy podmínky, harmonické funkce

Připomenutí.

- Je-li $z = x + iy$ a $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, kde u, v jsou reálné funkce, pak $u = \operatorname{Re} f$ (**reálná část funkce f**) a $v = \operatorname{Im} f$ (**imaginární část funkce f**).
- Mějme funkci $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ takovou, že funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají spojitě parciální derivace. Potom $f'(z)$ existuje právě tehdy, když jsou splněny **Cauchyovy-Riemannovy podmínky**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

V takovém případě platí

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

- Funkce $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je **harmonická**, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, jestliže má spojitě druhé parc. derivace a platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \text{pro každé } (x, y) \in \Omega.$$

Podstatné je, že součet $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ je nulový v každém bodě množiny Ω . Tj. neřešíme, pro jaké body $(x, y) \in \Omega$ je součet nulový, ale zda je nulový vždy nezávisle na $(x, y) \in \Omega$. V našich příkladech bude typicky $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Výsledky

- Úloha 1: (a) $u(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$, $v(x, y) = -\frac{2x^2y}{x^2+y^2}$
(b) $u(x, y) = x^2 + (y+1)^2 + \cos 2y$, $v(x, y) = \sin 2y$
- Úloha 2: Funkce je diferencovatelná v bodech splňující $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, tj. na přímce $x = y$. V těchto bodech platí $f'(z) = 2xi = 2i \operatorname{Re} z$.
- Úloha 3: Ano, je. Máme $f'(1+4i) = 2+8i$.
- Úloha 4: $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $f'(1+3i) = 1+i$
- Úloha 5: Není harmonická.
- Úloha 6: $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ a zároveň $\beta = -\frac{1}{3}$
- Úloha 7: Funkce je diferencovatelná na přímce $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z + 2$ právě tehdy, když $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Pro tyto hodnoty parametrů platí v bodech na přímce $f'(z) = 2x - 1 + i = 2 \operatorname{Re} z - 1 + i$.
- Úloha 8: (a) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta = 3$.
(b) $\alpha = \beta = 3$.
- Úloha 9: $n = 0, 1, 2$ a $\alpha = \pm 4$.