

Cvičení – Komplexní analýza 2025/2026

Cvičení 3

Úloha 1. Mějme funkci

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 4xy + 3x - y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nalezněte všechny funkce $v(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že:

- (a) funkce $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je celistvá;
- (b) funkce $f(z)$ jako výše je celistvá a navíc $f(i) = -2 + 4i$.

Úloha 2. Mějme funkci

$$u(x, y) = e^{2x} \cos(2y) + x^3 - 3xy^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nalezněte všechny funkce $v(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že:

- (a) funkce $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je celistvá;
- (b) funkce $f(z)$ jako výše je celistvá a navíc $f(1 + i\pi) = 1 + e^2 - 3\pi^2 + 3\pi i$.

Úloha 3. Dokažte, že pro každé $z, w \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{Z}$ platí

- (a) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$;
- (b) $e^z \neq 0$;
- (c) $e^z = e^w$ právě tehdy, když $z = w + 2k\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$;
- (d) $(e^z)^n = e^{nz}$.

Úloha 4. Určete velikost a v jakém leží kvadrantu komplexní číslo $z = e^{4 - \frac{301}{200}\pi i}$.

Úloha 5. Vyjádřete funkci $\sin(-5iz^3)$ pomocí exponenciální funkce.

Úloha 6. Určete reálnou a imaginární část čísla z , je-li

- (a) $z = e^{(2-3i)^2}$;
- (b) $z = \ln(-2 - 2i)$;
- (c) $z = \cos(\pi + i \ln 2)$.

Úloha 7. Nalezněte všechna řešení následujících rovnic.

- (a) $e^{6i+3iz} + 6 = 0$
- (b) $(\overline{e^z})^2 = i$

Pro nudící se

Úloha 8. Mějme funkci

$$v(x, y) = -\cosh x \cos y - 2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nalezněte všechny funkce $u(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že funkce $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je celistvá a platí $f(i\pi) = -i$.

[Připomenutí: Platí $(\sinh)' = \cosh$ a $(\cosh)' = \sinh$.]

Úloha 9. Nalezněte všechna řešení následujících rovnic.

- (a) $\cos z = 4$
- (b) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$
- (c) $\ln(z^2 - 1) = i\frac{\pi}{2}$

Úloha 10. Dokažte, že je-li funkce $f(z) = u(x) + iv(y)$ celistvá, potom $f(z)$ je nutně polynom stupně nejvýše jedna.

[Nápověda: Podstatné je, že funkce $u(x, y) = u(x)$ závisí pouze na $\operatorname{Re} z$ a funkce $v(x, y) = v(y)$ závisí pouze na $\operatorname{Im} z$. Využijte toho, že reálná a imaginární část celistvé funkce jsou harmonické funkce na $\mathbb{R}^2$.]

Cauchyovy-Riemannovy podmínky

Připomenutí.

- Je-li $z = x + iy$ a $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, kde u, v jsou reálné funkce, pak $u = \operatorname{Re} f$ (reálná část funkce f) a $v = \operatorname{Im} f$ (imaginární část funkce f).
- Mějme funkci $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ takovou, že funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají spojitě parciální derivace. Potom $f'(z)$ existuje právě tehdy, když jsou splněny **Cauchyovy-Riemannovy podmínky**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

V takovém případě platí

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Elementární funkce

Připomenutí.

- Pro $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definujeme

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y),$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

- Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definujeme hlavní hodnotu logaritmu

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

- Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $e^{\ln z} = z$.
- Pozor, v opačném pořadí to obecně neplatí. Tj. obecně není pravda $\ln e^z = z$.
- $e^z = e^w$ právě tehdy, když $z = w + 2k\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

Výsledky

Úloha 1: (a) $v(x, y) = 2xy - 2y^2 + 3y + 2x^2 + x + K$, kde $K \in \mathbb{R}$
(b) $K = 3$

Úloha 2: (a) $v(x, y) = e^{2x} \sin(2y) + 3x^2y - y^3 + K$, kde $K \in \mathbb{R}$
(b) $K = \pi^3$

Úloha 4: $|z| = e^4$, z leží v 1. kvadrantu

Úloha 5: $\sin(-5iz^3) = \frac{e^{5z^3} - e^{-5z^3}}{2i}$

Úloha 6: (a) $\operatorname{Re} z = e^{-5} \cos 12$, $\operatorname{Im} z = -e^{-5} \sin 12$

(b) $\operatorname{Re} z = \ln \sqrt{8}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{3\pi}{4}$

(c) $\operatorname{Re} z = -\frac{5}{4}$, $\operatorname{Im} z = 0$

Úloha 7: (a) $z_k = -2 + \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} - \frac{\ln 6}{3}i$, kde $k \in \mathbb{Z}$

(b) $z_k = -\frac{\pi}{4}i - k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$

Úloha 8: $u(x, y) = \sinh x \sin y$

Úloha 9: (a) $z_k = -i \ln(4 \pm \sqrt{15}) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$

(b) $z_k = \pm \frac{2\pi i}{3} + 2k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$

(c) $z_{1,2} = \pm \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$; ekvivalentně (např.) $z_1 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$ a $z_2 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{9\pi}{8}}$