

Cvičení – Komplexní analýza 2025/2026

Cvičení 5 a část 6

Úloha 1. Rozviňte funkci $f(z)$ do mocninné řady se středem v z_0 a určete parametry jejího kruhu konvergence.

(a) $f(z) = \frac{z-3}{1-2z}$, $z_0 = 3$

(b) $f(z) = \frac{1}{(z+6)^2}$, $z_0 = -4$

(c) $f(z) = (z-2)^4 e^{3z}$, $z_0 = 2$

(d) $f(z) = \frac{(z+1)^5}{z^2+z-2}$, $z_0 = -1$

Úloha 2.

(a) Mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2i)^n$$

má poloměr konvergence $R = 4$. Konverguje v bodě $z = 2 + 3i$?

(b) Laurentova řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z+4)^n$$

má vnitřní poloměr konvergence $r = 3$ a vnější $R = 9$. Konverguje v bodě $z = -6$?

Úloha 3. Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{1}{(z+5)(z-3)^4(z^2+2z-15)^2}$$

do Laurentovy řady na maximálním prstencovém okolí bodu $z_0 = 3$ a určete jeho parametry.

Úloha 4. Klasifikujte typ izolované singularity funkce $f(z)$ v bodě z , je-li

(a) $z = -2$ a

$$f(z) = -\frac{9}{(z+2)^5} + \frac{8}{(z+2)^3} - \frac{3}{(z+2)^2} + \sum_{n=-3}^{\infty} n^2 (z+2)^{3n+4}, \quad z \in P(-2);$$

(b) $z = i$ a

$$f(z) = \frac{2}{(z-i)^3} + \frac{1}{z-i} + \sum_{n=-5}^{\infty} (n+3)(z-i)^{2n+7}, \quad z \in P(i).$$

Úloha 5. Určete koeficient $\alpha \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby funkce

$$f(z) = \frac{\alpha}{(z-1)^k} + \frac{7}{3(z-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n}, \quad z \in P(1),$$

měla v bodě 1 jednoduchý pól.

Pro nudící se

Úloha 6. Rozviňte funkci $f(z) = \frac{z^3-2z+1}{z+2}$ do mocninné řady se středem v 1 a určete parametry jejího kruhu konvergence.

Úloha 7. Rozviňte funkci $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ do Laurentovy řady na co největším prstencovém okolí bodu 1 a určete jeho parametry. Dále klasifikujte typ izolované singularity funkce v bodě 1.

Úloha 8. O funkci $f(z)$ víme, že má v bodě i pól řádu 1. Dále o ní víme, že splňuje $(z-i)f(z)|_{z=i} = 5i$ a $(z-i)f(z)|_{z=0} = -3$. Klasifikujte typ izolované singularity funkce $g(z) = f(z) + 3 + z^2 - \frac{5i}{z-i}$, $z \in P(i)$, v bodě i .

Mocninné řady

Připomenutí.

- **Mocninná řada** je řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je daná číselná posloupnost (tzv. **koefficienty mocninné řady**), z je proměnná a z_0 je pevně dané číslo (tzv. **střed mocninné řady**).

- ★ Pro každou mocninnou řadu existuje (právě jedno) $R \in [0, \infty]$ takové, že řada absolutně konverguje na otevřeném kruhu se středem v z_0 a poloměru R , a diverguje na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}$. Toto R se nazývá **poloměr konvergence mocninné řady**. Otevřený kruh se středem z_0 a poloměru R se nazývá **kruh konvergence mocninné řady**.
- ★ $R = \infty$ znamená, že kruh konvergence je celá komplexní rovina. Pokud je $R = 0$, tak je tento otevřený kruh vlastně prázdná množina. Příklad $R = 0$ nastat může, ale takové mocninné řady jsou pro nás nezajímavé, protože s nimi nejde nic moc dále dělat.
- ★ Mocninná řada **NEobsahuje** záporné mocniny $(z - z_0)$.
- Znamé součty/rozvoje, které bychom měli bezpečně znát:
 - ★ (geometrická řada:) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ pro $|z| < 1$;
 - ★ (rozvoj exponenciály:) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ pro libovolné $z \in \mathbb{C}$.
- Jednoduché parciální zlomky (tj. s lineárním polynomem ve jmenovateli) rozvíjíme pomocí známého součtu geometrické řady.
- Správný střed si vyrobíme přepsáním $z = (z - z_0) + z_0$.
- Parciální zlomky odpovídající vyšší násobnosti kořene převedeme na jednoduché, které umíme rozvinout, pomocí integrování. Následně derivujeme, abychom získali požadovaný rozvoj.

Laurentovy řady

Připomenutí.

- **Laurentova řada** je řada tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je daná číselná posloupnost (tzv. **koefficienty Laurentovy řady**), z je proměnná a z_0 je pevně dané číslo (tzv. **střed Laurentovy řady**).

- Narozdíl od mocninných řad Laurentova řada obsahuje i záporné mocniny $(z - z_0)$.
- Laurentovy řady konvergují na mezikruzích.
 - ★ $P(z_0; r; R)$, kde z_0 je střed, r je vnitřní poloměr a R je vnější poloměr.
 - ★ Speciálně $P(z_0; 0; R)$ je prstencové okolí bodu z_0 , tj. otevřený kruh se středem v z_0 a poloměru R bez svého středu.



- Při rozvoji racionální funkce do Laurentovy řady na prstencovém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ postupujeme stejně jako u mocninných řad.

Klasifikace izolovaných singularit (pomocí Laurentova rozvoje)

Připomenutí.

- Nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ je Laurentův rozvoj funkce f na prstencovém okolí izolované singularity $z_0 \in \mathbb{C}$. Rozlišujeme tři typy izolovaných singularit.
 - (1) Pokud $a_n = 0$ pro každé $n < 0$, pak z_0 je **odstranitelná singularita**.
 - ★ $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$ na prstencovém okolí z_0
 - (2) Pokud $a_{-k} \neq 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -k$, pak z_0 je **pól řádu k** .
 - ★ $f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$ na prstencovém okolí z_0 , kde $a_{-k} \neq 0$
 - (3) Pokud $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$, pak z_0 je **podstatná singularita**.
- Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme typ izolované singularity z rozvoje.

Výsledky

- Úloha 1: (a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(-5)^{n+1}} (z-3)^{n+1}$ pro $|z-3| < \frac{5}{2}$ (tj. $R = \frac{5}{2}$)
(b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} n(z+4)^{n-1}$ pro $|z+4| < 2$ (tj. $R = 2$)
(c) $f(z) = e^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z-2)^{n+4}}{n!}$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ (tj. $R = \infty$)
(d) $f(z) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+1)^{n+5} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{n+5}}{2^{n+1}}$ pro $|z+1| < 1$ (tj. $R = 1$)
- Úloha 2: (a) Ano.
(b) Ne.
- Úloha 3: $f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^{n+1}} n(n-1)(z-3)^{n-8}$ pro $0 < |z-3| < 8$ (tj. $r = 0$ a $R = 8$)
- Úloha 4: (a) Pól řádu 3.
(b) Odstranitelná singularita.
- Úloha 5: $k = 2$, $a = -\frac{8}{3}$
- Úloha 6: $f(z) = (z-1)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 3$ (tj. $R = 3$)
- Úloha 7: $f(z) = \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{2^{n+3} e^2}{(n+3)!} (z-1)^n$ pro $0 < |z-1| < \infty$ (tj. $r = 0$ a $R = \infty$); pól řádu 3
- Úloha 8: Odstranitelná singularita.