

Cvičení – Komplexní analýza 2025/2026

Cvičení 6 a část 7

Úloha 1. Klasifikujte typ izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{2}{(z-i)^3} + \frac{1}{z-i} + \sum_{n=-5}^{\infty} (n+3)(z-i)^{2n+7}, \quad z \in P(i),$$

v bodě $z = i$.

Úloha 2. Určete koeficient $\alpha \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby funkce

$$f(z) = \frac{\alpha}{(z-1)^k} + \frac{7}{3(z-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n}, \quad z \in P(1),$$

měla v bodě 1 jednoduchý pól.

Úloha 3. Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $f(z)$, kde

(a) $f(z) = \frac{\sin z + z - \pi}{z^2(z-\pi)^4}$

(b) $f(z) = \frac{(e^z - 1)(1 - \cos z)^4}{z^{11}}$

(c) $f(z) = \frac{(z - \sin z)(1 - \cos z)}{z^7(1 - e^{iz})^2}$

(d) $f(z) = \frac{e^{iz} - i - \cos z}{(1 - \sin z)^2(z - \frac{\pi}{2})}$

Úloha 4. Určete reziduum funkce $f(z)$ v bodě z , je-li

(a) $z = -2$ a

$$f(z) = \frac{3}{(z+2)^2} + \frac{2}{z+2} + \sum_{n=-3}^{\infty} n^2(z+2)^{3n+5}, \quad z \in P(-2);$$

(b) $z = 0$ a

$$f(z) = \frac{2}{z^3} + \sum_{n=-3}^{\infty} (n+1)z^{2n+4}, \quad z \in P(0).$$

Úloha 5. Určete koeficient $\alpha \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby platilo

$$\operatorname{res}_1 \left(\frac{\alpha}{(z-1)^k} + \frac{2}{3(z-1)^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n} \right) = \frac{4}{9}.$$

Úloha 6. Spočtěte.

(a) $\operatorname{res}_{\pi} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$

(b) $\operatorname{res}_0 \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$

(c) $\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz}}{\sin(2z)}$

(d) $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{e^z - 1 - z}$

(e) $\operatorname{res}_0 \frac{z^2}{1 - \cos z}$

Pro nudící se

Úloha 7. O funkci $f(z)$ víme, že má v bodě i pól řádu 1. Dále o ní víme, že splňuje $(z-i)f(z)|_{z=i} = 5i$ a $(z-i)f(z)|_{z=0} = -3$. Klasifikujte typ izolované singularity funkce $g(z) = f(z) + 3 + z^2 - \frac{5i}{z-i}$, $z \in P(i)$, v bodě i .

Úloha 8. Zdůvodněte/Dokažte, že platí následující tvrzení: Má-li funkce $f(z)$ v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ pól řádu $k \in \mathbb{N}$ a funkce $g(z)$ pól řádu $l \in \mathbb{N}$, přičemž $k \neq l$, pak funkce $f(z) + g(z)$ má v bodě z_0 pól řádu $\max\{k, l\}$. Rozmyslete si také, že předpoklad $k \neq l$ je důležitý.

Klasifikace izolovaných singularit

Připomenutí.

- Nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je Laurentův rozvoj funkce f na prstencovém okolí izolované singularity $z_0 \in \mathbb{C}$. Rozlišujeme tři typy izolovaných singularit.
 - (1) Pokud $a_n = 0$ pro každé $n < 0$, pak z_0 je **odstranitelná singularita**.
 - ★ $f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$ na prstencovém okolí z_0
 - (2) Pokud $a_{-k} \neq 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -k$, pak z_0 je **pól řádu k** .
 - ★ $f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$ na prstencovém okolí z_0 , kde $a_{-k} \neq 0$
 - (3) Pokud $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$, pak z_0 je **podstatná singularita**.
- Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme typ izolované singularity z rozvoje.
- Pokud ne, často se hodí následující pravidlo. Uvažme funkci $f = \frac{g}{h}$, přičemž g má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ kořen násobnosti $k \in \mathbb{N}_0$ a h má v bodě z_0 kořen násobnosti $l \in \mathbb{N}$. Potom f má v z_0 :
 - ★ odstranitelnou singularitu, pokud $k \geq l$;
 - ★ pól řádu $l - k$, pokud $k < l$.
- Funkce $f \neq 0$, která je holomorfní na okolí $z_0 \in \mathbb{C}$, má v z_0 **kořen násobnosti $k \in \mathbb{N}_0$** , pokud
$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$
 - ★ Polynom $(z-z_0)^k$, $k \in \mathbb{N}$, má v bodě z_0 kořen násobnosti k .
- Má-li funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ kořen násobnosti k a g násobnosti l , potom funkce $f(z)g(z)$ má v bodě z_0 kořen násobnosti $k+l$.

Reziduum

Připomenutí.

- (1) Nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je Laurentův rozvoj funkce f na prstencovém okolí izolované singularity $z_0 \in \mathbb{C}$. Koeficient a_{-1} (tj. koeficient u $(z-z_0)^{-1}$) nazýváme **reziduem** funkce f v bodě z_0 a značíme $\text{res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$.
- (2) Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme reziduum z rozvoje.
- (3) Pokud ne, často se hodí následující pravidla pro výčet reziduí.
 - Má-li $f(z)$ v bodě z_0 **pól řádu $k \in \mathbb{N}$** , potom

$$\text{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)}.$$

- Je-li funkce f tvaru $f = \frac{g}{h}$, kde g je holomorfní na okolí z_0 a h má v bodě z_0 **jednonásobný kořen**, potom

$$\text{res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

- Reziduum v izolované singularitě je vždy dobře definované komplexní číslo. Tvrdit, že reziduum „neexistuje“ nebo je „nekonečné“ nedává žádný smysl...

Výsledky

Úloha 1: Odstranitelná singularita.

Úloha 2: $k = 2$, $a = -\frac{8}{3}$

Úloha 3: (a) Izolované singularity jsou body 0 a π . Bod 0 je pól řádu 2. Bod π je pól řádu 1.

(b) Jediná izolovaná singularita je bod 0. Bod 0 je pól řádu 2.

(c) Izolované singularity jsou body $2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Body $2k\pi$ pro $k \neq 0$ jsou odstranitelné singularity. Bod 0 je pól řádu 4.

(d) Izolované singularity jsou body $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Body $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pro $k \neq 0$ jsou póly řádu 2. Bod $\frac{\pi}{2}$ je pól řádu 3.

Úloha 4: (a) $\text{res}_{-2} f = 6$

(b) $\text{res}_0 f = 0$

Úloha 5: $k = 1$ a $\alpha = \frac{1}{3}$

Úloha 6: (a) $\frac{1}{\pi^2}$

(b) $\frac{1}{\pi^2}$

(c) $-\frac{i}{2}$

(d) 2

(e) 0

Úloha 7: Odstranitelná singularita.