

Cvičení – Komplexní analýza 2025/2026
Cvičení 7

Úloha 1. Určete reziduum funkce $f(z)$ v bodě z , je-li

(a) $z = -2$ a

$$f(z) = \frac{3}{(z+2)^2} + \frac{2}{z+2} + \sum_{n=-3}^{\infty} n^2(z+2)^{3n+5}, \quad z \in P(-2);$$

(b) $z = 0$ a

$$f(z) = \frac{2}{z^3} + \sum_{n=-\infty}^{-1} (n+1)z^{2n+4}, \quad z \in P(0).$$

Úloha 2. Určete koeficient $\alpha \in \mathbb{C}$ a exponent $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby platilo

$$\operatorname{res}_1 \left(\frac{\alpha}{(z-1)^k} + \frac{2}{3(z-1)^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-3}}{3^n} \right) = \frac{4}{9}.$$

Úloha 3. Spočtěte.

(a) $\operatorname{res}_{\pi} \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$

(b) $\operatorname{res}_0 \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}$

(c) $\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz}}{\sin(2z)}$

(d) $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{e^z - 1 - z}$

(e) $\operatorname{res}_0 \frac{z^2}{1 - \cos z}$

Úloha 4. Spočtěte.

(a)

$$\int_C \frac{z}{(z+2)(z-5)^2} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-4|=2$.

(b)

$$\int_C \frac{1}{z \sin z} + \frac{e^{\sin z}}{z+3} dz,$$

kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníka s vrcholy -2 , $\frac{3\pi}{2} + 2i$, $\frac{3\pi}{2} - 2i$.

(c)

$$\int_C \frac{1}{e^z - 1} + \frac{z - \frac{\pi}{2}}{(\cos z)^2} dz,$$

kde C je kladně orientovaná hranice obdélníka s vrcholy $\frac{\pi}{4} + i$, $\frac{\pi}{4} - i$, $\pi + i$, $\pi - i$.

Úloha 5. Určete, čemu se rovná

$$\int_C \frac{2}{(z+3)^5} + \frac{3}{z-3} + \frac{4}{z+3} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z+1|=3$.

Pro nudičí se

Úloha 6. O funkcích $f_1(z)$, $f_2(z)$ a $f_3(z)$ víme, že mají v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ jednoduchý pól a platí $\operatorname{res}_{z_0} f_1(z) = 2$, $\operatorname{res}_{z_0} f_2(z) = -1$ a $\operatorname{res}_{z_0} f_3(z) = -2$. Určete, jaký typ izolované singularity mají v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ funkce $g(z) = f_1(z) + f_2(z)$ a $h(z) = f_1(z) + f_3(z)$.

Úloha 7. Víme, že

$$\int_{L_1} f(z) dz = 5 \quad a \quad \int_{L_2} f(z) dz = -3,$$

kde $f(z)$ je celistvá funkce, L_1 je úsečka s počátečním bodem -2 a koncovým i a L_2 je úsečka s počátečním bodem i a koncovým 2 . Určete

$$\int_C f(z) dz,$$

kde C je záporně orientovaná polokružnice se středem v 0 , poloměru 2 a počátečním bodem 2 .

Reziduum

Připomenutí.

- (1) Nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ je Laurentův rozvoj funkce f na prstencovém okolí izolované singularity $z_0 \in \mathbb{C}$. Koeficient a_{-1} (tj. koeficient u $(z - z_0)^{-1}$) nazýváme **reziduem** funkce f v bodě z_0 a značíme $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = a_{-1}$.
- (2) Máme-li k dispozici Laurentův rozvoj (na správném prstencovém okolí!), vyčteme reziduum z rozvoje.
- (3) Pokud ne, často se hodí následující pravidla pro výčet reziduí.
 - Má-li $f(z)$ v bodě z_0 **pól řádu** $k \in \mathbb{N}$, potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^k f(z)]^{(k-1)}.$$

Speciálně pro

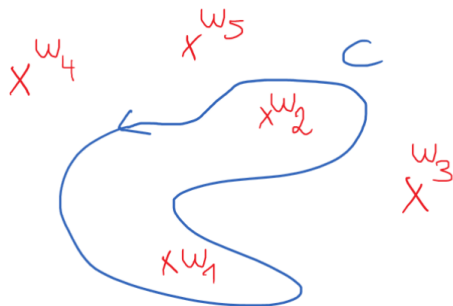
- ★ $k = 1$: $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$;
- ★ $k = 2$: $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^2 f(z))'$.
- Je-li funkce f tvaru $f = \frac{g}{h}$, kde g je holomorfní na okolí z_0 a h má v bodě z_0 **jednonásobný kořen**, potom

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

- Reziduum v izolované singularitě je vždy dobře definované komplexní číslo. Tvrdit, že reziduum „neexistuje“, nebo je „nekonečné“ nedává žádný smysl...

Reziduová věta

Připomenutí.



$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{w_1} f(z) + \operatorname{res}_{w_2} f(z) \right)$$

Výsledky

Úloha 1: (a) $\operatorname{res}_{-2} f = 6$
(b) $\operatorname{res}_0 f = 0$

Úloha 2: $k = 1$ a $\alpha = \frac{1}{3}$

Úloha 3: (a) $\frac{1}{\pi^2}$
(b) $\frac{1}{\pi^2}$
(c) $-\frac{i}{2}$
(d) 2
(e) 0

Úloha 4: (a) $\frac{4}{49}\pi i$
(b) $-2i$
(c) $2\pi i$

Úloha 5: $8\pi i$

Úloha 6: $g(z)$ má v z_0 jednoduchý pól; $h(z)$ má v z_0 odstranitelnou singularitu

Úloha 7: -2