

Cvičení – Komplexní analýza 2025/2026
Cvičení 8

Úloha 1. *Určete, čemu se rovná*

$$\int_C \frac{2}{(z+3)^5} + \frac{3}{z-3} + \frac{4}{z+3} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z+1|=3$.

Úloha 2. *Spočtěte.*

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-6x+25} dx$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2-2x+2)^2} dx$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2-2x+2)^2} dx$

Úloha 3. *Spočtěte Fourierovu transformaci funkce*

$$f(t) = \mathbb{1}(t+4) - \mathbb{1}(t-2) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } t \in [-4, 2), \\ 0 & \text{pokud } t \in \mathbb{R} \setminus [-4, 2), \end{cases}$$

kde $\mathbb{1}(t)$ je Heavisideova funkce definovaná jako

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } t \geq 0, \\ 0 & \text{pokud } t < 0. \end{cases}$$

Úloha 4. *Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $f(t) = e^{-at}\mathbb{1}(t)$, kde $a > 0$.*

Reziduum

Připomenutí.

(1) Má-li $f(z)$ v bodě z_0 pól řádu $k \in \mathbb{N}$, potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^k f(z)]^{(k-1)}.$$

Speciálně pro

- $k = 1$: $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$;
- $k = 2$: $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^2 f(z))'$.

(2) Je-li funkce f tvaru $f = \frac{g}{h}$, kde g je holomorfní na okolí z_0 a h má v bodě z_0 jednoduchý kořen, potom

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Integrály typu $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx$

Připomenutí.

- Necht P, Q jsou nenulové polynomy, $\alpha \in \mathbb{R}$. Necht $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 1$ (pokud $\alpha = 0$, tak $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 2$) a Q nemá žádné reálné kořeny. Potom

(a) pokud $\alpha \geq 0$, pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{w \in S_+} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

kde

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \operatorname{Im} z > 0\};$$

(b) pokud $\alpha < 0$, pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{w \in S_-} \operatorname{res}_w \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},$$

kde

$$S_- = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0, \operatorname{Im} z < 0\}.$$

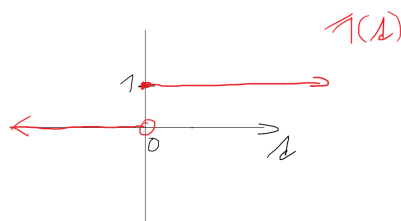
Fourierova transformace

Připomenutí.

- Fourierova transformace funkce $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

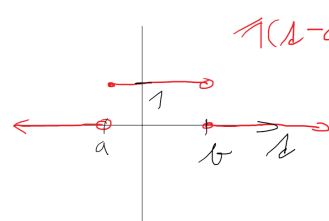
$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

- Heavisideova funkce:



$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

- Pro $a < b$ jest



$$\mathbb{1}(t-a) - \mathbb{1}(t-b) = \begin{cases} 1 & \text{pro } a \leq t < b \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Výsledky

Úloha 1: $8\pi i$

Úloha 2: (a) $\frac{\pi}{4}$

(b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\left(\frac{e^{-2}}{8} - \frac{e^{-6}}{24}\right)\pi$

(d) $e^{-1+i}\pi = e^{-1}(\cos 1 + i \sin 1)\pi$

(e) $e^{-1}\pi \cos 1$

Úloha 3: $\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{e^{-2i\omega} - e^{4i\omega}}{\omega} i & \text{pokud } \omega \neq 0, \\ 6 & \text{pokud } \omega = 0. \end{cases}$

Úloha 4: $\mathcal{F}[e^{-at}\mathbb{1}(t)](\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$, kde $a > 0$