

Komplexní analýza 2025/2026

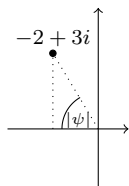
Dobrovolná domácí cvičení 1, řešení

Úloha 1. Nejprve číslo převedeme do algebraického tvaru. Rozšířením komplexně sdruženým číslem ke jmenovateli dostaneme

$$\frac{6+2i}{-1-2i} = \frac{6+2i}{-1-2i} \cdot \frac{-1+2i}{-1+2i} = \frac{-6+12i-2i-4}{1+4} = -2+2i.$$

Dále $i^{81} = i^{80}i = i$, takže $z = -2+2i+i = -2+3i$. Tedy $\operatorname{Re} z = -2$ a $\operatorname{Im} z = 3$.

Nyní převedeme z do goniometrického/exponenciálního tvaru. Jest $r = |z| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}$. Vidíme, že číslo z leží v druhém kvadrantu. (Nějaký) argument φ čísla z tedy můžeme určit například jako $\varphi = \pi - |\psi|$, kde $|\psi|$ je velikost (neorientovaného) úhlu ψ v pravoúhlém trojúhelníku:



Vidíme, že $\operatorname{tg} |\psi| = \frac{3}{2}$, takže $|\psi| = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$. Tedy $\varphi = \pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$. Je dobré si uvědomit, že takto zvolený úhel φ je zároveň hlavní hodnota argumentu čísla z .

Úloha 2. Máme

$$|z| = |(-2-2i)^{13}| |(3+3i)^{20}| = |-2-2i|^{13} |3+3i|^{20}.$$

Jest $|-2-2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ a $|3+3i| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$, takže

$$|z| = (\sqrt{8})^{13} (\sqrt{18})^{20}.$$

Vidíme, že čísla $(-2-2i)$ a $(3+3i)$ leží popořadě na ose 3. a 1. kvadrantu, takže snadno určíme jejich (dokonce hlavní) hodnotu argumentu. Jest $\arg(-2-2i) = -\frac{3}{4}\pi$ a $\arg(3+3i) = \frac{\pi}{4}$. Vzpomeneme si na geometrickou interpretaci násobení. Víme, že $13 \cdot (-\frac{3}{4}\pi) = -\frac{39}{4}\pi$ je (nějaký) argument čísla $(-2-2i)^{13}$ a $20 \cdot \frac{\pi}{4} = 5\pi$ je (nějaký) argument čísla $(3+3i)^{20}$. Takže $-\frac{39}{4}\pi + 5\pi = -\frac{19}{4}\pi$ je nějaký argument čísla z . Uvědomíme si, že (např.) $-\frac{19}{4}\pi = -4\pi - \frac{3}{4}\pi$, takže číslo z leží ve 3. kvadrantu (nejprve 2krát oběhneme kružnici v záporném směru a poté ještě pokračujeme v záporném směru o úhel velikosti $\frac{3}{4}\pi$). Vidíme, že $\arg z = -\frac{3}{4}\pi$.

Úloha 3. Řešení najdeme v exponenciálním tvaru, tj. $z = |z|e^{i\varphi}$ pro vhodné $\varphi \in \mathbb{R}$. S využitím $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ si také pravou stranu vyjádříme v exponenciálním tvaru jako $-5i = 5e^{-\frac{\pi}{2}i}$. Na levé straně využijeme Moivreovu větu. Tedy

$$z^3 = -5i$$

$$|z|^3 e^{3\varphi i} = 5e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

Takže $|z|^3 = 5$ a $3\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Odtud $|z| = \sqrt[3]{5}$ a $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi$. Všechna různá řešení rovnice lze tedy zapsat (např.) jako $z_k = \sqrt[3]{5}e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi)}$ pro $k = 0, 1, 2$.