

Komplexní analýza 2025/2026

Dobrovolná domácí cvičení 2, řešení

Úloha 1. *S jednotlivými členy se vypořádáme postupně. Zaprvé, jest $2z^2 = 2(x+iy)^2 = 2x^2 - 2y^2 + 4xyi$. Dále $\overline{z-i} = x+iy-i = x-iy+i = x+(1-y)i$. Tedy*

$$\begin{aligned} \frac{2z^2}{\overline{z-i}} &= \frac{2x^2 - 2y^2 + 4xyi}{x + (1-y)i} = \frac{2x^2 - 2y^2 + 4xyi}{x + (1-y)i} \cdot \frac{x - (1-y)i}{x - (1-y)i} \\ &= \frac{(2x^2 - 2y^2)x - 4(1-y)xy - (2x^2 - 2y^2)(1-y)i + 4x^2yi}{x^2 + (1-y)^2} \\ &= \frac{(2x^2 - 2y^2)x - 4(1-y)xy}{x^2 + (1-y)^2} - \frac{(2x^2 - 2y^2)(1-y) - 4x^2y}{x^2 + (1-y)^2}i. \end{aligned}$$

Zadruhé, máme $z-2+i = x+iy-2+i = x-2+(y+1)i$, takže

$$i|z-2+i|^2 = i((x-2)^2 + (y+1)^2).$$

Nakonec $i^{13}z = iz = i(x+iy) = -y+ix$, takže

$$\operatorname{Re}(i^{13}z) = -y.$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(2x^2 - 2y^2)x - 4(1-y)xy}{x^2 + (1-y)^2} - \frac{(2x^2 - 2y^2)(1-y) - 4x^2y}{x^2 + (1-y)^2}i + i((x-2)^2 + (y+1)^2) - y \\ &= \frac{(2x^2 - 2y^2)x - 4(1-y)xy}{x^2 + (1-y)^2} - y + \left((x-2)^2 + (y+1)^2 - \frac{(2x^2 - 2y^2)(1-y) - 4x^2y}{x^2 + (1-y)^2} \right)i. \end{aligned}$$

Takže

$$u(x, y) = \frac{(2x^2 - 2y^2)x - 4(1-y)xy}{x^2 + (1-y)^2} - y$$

a

$$v(x, y) = (x-2)^2 + (y+1)^2 - \frac{(2x^2 - 2y^2)(1-y) - 4x^2y}{x^2 + (1-y)^2}.$$

Úloha 2. *Začneme tím, že určíme reálnou a imaginární část funkce $f(z)$. Jest $\operatorname{Im}(\bar{z}) = \operatorname{Im}(x-iy) = -y$, $\operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(x^2 - y^2 + 2xyi) = 2xy$ a $\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(x^2 - y^2 + 2xyi) = x^2 - y^2$, takže*

$$f(z) = -\beta^2 y - 4xy + i\alpha(x^2 - y^2 + 2y^2) = -\beta^2 y - 4xy + i\alpha(x^2 + y^2).$$

Tedy $u(x, y) = -\beta^2 y - 4xy$ a $v(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)$. Připomeňme si, že funkce $f(z)$ má v bodě $-\frac{1}{2} - 2i$ derivaci právě tehdy, když jsou splněny zároveň obě Cauchyovy-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}, -2\right) = \frac{\partial v}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}, -2\right) \quad (\text{CR1})$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}, -2\right) = -\frac{\partial v}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}, -2\right). \quad (\text{CR2})$$

Podmínka (CR1) nám tedy dává

$$\begin{aligned} -4y &= 2\alpha y \Big|_{x=-\frac{1}{2}, y=-2} \\ 8 &= -4\alpha \\ \alpha &= -2. \end{aligned}$$

Podmínka (CR2) nám dává

$$\begin{aligned} -\beta^2 - 4x &= -2\alpha x \Big|_{x=-\frac{1}{2}, y=-2} \\ -\beta^2 + 2 &= \alpha. \end{aligned}$$

Dosažením $\alpha = -2$ tedy

$$\beta^2 = 4,$$

takže $\beta = \pm 2$. Funkce je tedy diferencovatelná v bodě $-\frac{1}{2} - 2i$ pro $\alpha = -2$ a $\beta = \pm 2$. Pro tyto hodnoty parametrů dále platí

$$f'(-\frac{1}{2} - 2i) = \frac{\partial u}{\partial x}(-\frac{1}{2}, -2) + i \frac{\partial v}{\partial x}(-\frac{1}{2}, -2) = -4y - 4xi|_{x=-\frac{1}{2}, y=-2} = 8 + 2i.$$

Úloha 3. Připomeňme si, že $u(x, y)$ je harmonická, jestliže

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \text{pro všechny } x, y \in \mathbb{R}.$$

Spočteme nejdříve tyto parciální derivace. Jest

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (3\alpha x^2 y^3 + y^5 + 5x^4 y + 2e^{2x} \cos(\beta y)) = 6\alpha x y^3 + 20x^3 y + 4e^{2x} \cos(\beta y)$$

a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (3\alpha x^3 y^2 + 5xy^4 + x^5 - \beta e^{2x} \sin(\beta y)) = 6\alpha x^3 y + 20xy^3 - \beta^2 e^{2x} \cos(\beta y).$$

Hledáme tedy parametry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takové, aby

$$\begin{aligned} 6\alpha x y^3 + 20x^3 y + 4e^{2x} \cos(\beta y) + 6\alpha x^3 y + 20xy^3 - \beta^2 e^{2x} \cos(\beta y) &\equiv 0 \\ (6\alpha + 20)xy^3 + (20 + 6\alpha)x^3 y + (4 - \beta^2)e^{2x} \cos(\beta y) &\equiv 0 \end{aligned}$$

pro každé $x, y \in \mathbb{R}$. Vidíme, že zvolíme-li $\alpha = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$, pak jsou první dva členy konstantě nulové (a jiná možnost zřejmě není). Dále vidíme, že zvolíme-li $\beta = \pm 2$, pak je i třetí člen konstantně nulový. Zde bychom si měli uvědomit, že jiná možnost není. Neexistuje totiž volba parametru β taková, aby $\cos(\beta y) = 0$ pro každé $y \in \mathbb{R}$ (stačí zvolit $y = 0$, potom zřejmě $\cos(\beta \cdot 0) = 1 \neq 0$ pro libovolné $\beta \in \mathbb{R}$).

Funkce $u(x, y)$ je tedy harmonická právě tehdy, když $\alpha = -\frac{10}{3}$ a $\beta = \pm 2$.