

Komplexní analýza 2025/2026
Dobrovolná domácí cvičení 4, řešení

Úloha 1. Nejprve si připomeňme dva základní součty/rozvoje, které bychom měli bezpečně znát a ovládat, a to:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{pro } |z| < 1 \quad (\text{GEOM})$$

a

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{pro každé } z \in \mathbb{C}. \quad (\text{EXP})$$

(a) Nejprve řadu upravíme, abychom mohli využít známý součet (EXP). Jest

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!2^{n+2}} (z+6)^{4n+3} = \frac{-(z+6)^3}{2^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} (z+6)^{4n} = \frac{-(z+6)^3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-(z+6)^4}{2}\right)^n}{n!}.$$

S využitím (EXP) jest

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-(z+6)^4}{2}\right)^n}{n!} = e^{\frac{-(z+6)^4}{2}} \quad \text{pro každé } z \in \mathbb{C}.$$

A tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!2^{n+2}} (z+6)^{4n+3} = \frac{-(z+6)^3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-(z+6)^4}{2}\right)^n}{n!} = \frac{-(z+6)^3}{4} e^{\frac{-(z+6)^4}{2}}$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$ (poloměr konvergence je tedy $R = \infty$, střed řady je -6).

(b) Kdyby se v řadě nevyskytoval faktor $2n+2$ ve jmenovateli, byli bychom řadu schopni sečíst pomocí (GEOM). Tohoto faktoru ve jmenovateli se tedy zbavíme derivací (vhodně upravené) řady, zderivovanou řadu sečteme a nakonec integraci zjistíme hledaný součet. Jest

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} z^{2n+6}}{2n+2} = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} z^{2n+2}}{2n+2}. \quad (1)$$

Derivací řady člen po člen a za využití (GEOM) dostaneme

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} z^{2n+2}}{2n+2} \right)' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} (2n+2) z^{2n+1}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+2} z^{2n+1} = 9z \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{2n} \\ &= 9z \sum_{n=0}^{\infty} (3z^2)^n = 9z \frac{1}{1-3z^2} = \frac{9z}{1-3z^2} \end{aligned}$$

pro

$$\begin{aligned} |3z^2| &< 1 \\ |z|^2 &< \frac{1}{3} \\ |z| &< \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} z^{2n+2}}{2n+2} \right)' = \frac{9z}{1-3z^2},$$

jest

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} z^{2n+2}}{2n+2} = \int \frac{9z}{1-3z^2} dz = -\frac{9}{6} \int \frac{-6z}{1-3z^2} dz = -\frac{9}{6} \ln(1-3z^2) + C.$$

Konstantu C dopočítáme dosazením středu řady:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} z^{2n+2}}{2n+2} \Big|_{z=0} &= -\frac{3}{2} \ln(1-3z^2) + C \Big|_{z=0} \\ 0 &= 0 + C \\ C &= 0.\end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} z^{2n+2}}{2n+2} = -\frac{3}{2} \ln(1-3z^2). \quad (2)$$

Takže dosazením (2) do (1) dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} z^{2n+6}}{2n+2} = -\frac{3z^4}{2} \ln(1-3z^2)$$

pro $|z| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ (poloměr konvergence je $\frac{\sqrt{3}}{3}$, střed řady je 0).

(c) Kdyby se v řadě nevyskytoval faktor $n+2$ v čitateli, byli bychom řadu schopni sečíst pomocí (EXP). Tohoto faktoru v čitateli se tedy zbavíme integrací (vhodně upravené) řady, zintegrovanou řadu sečteme a nakonec derivací zjistíme hledaný součet. Jest

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+5}}{n!} = (z-2i)^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+1}}{n!}. \quad (3)$$

Integrací řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+1}}{n!}$ člen po člen dostaneme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+2}}{n!(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+2}}{n!},$$

kterou sečteme za využití (EXP):

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+2}}{n!} &= \frac{(z-2i)^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \frac{(z-2i)^n}{n!} = \frac{(z-2i)^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-(z-2i)}{4}\right)^n}{n!} \\ &= \frac{(z-2i)^2}{4} e^{\frac{-(z-2i)}{4}}\end{aligned}$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$. Takže

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+1}}{n!} &= \left(\frac{(z-2i)^2}{4} e^{\frac{-(z-2i)}{4}} \right)' \\ &= \frac{z-2i}{2} e^{\frac{-(z-2i)}{4}} - \frac{1}{4} \frac{(z-2i)^2}{4} e^{\frac{-(z-2i)}{4}} \\ &= \frac{z-2i}{2} \left(1 - \frac{z-2i}{8} \right) e^{\frac{-(z-2i)}{4}}.\end{aligned} \quad (4)$$

Dosazením (4) zpět do (3) tedy dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{4^{n+1}} \frac{(z-2i)^{n+5}}{n!} = \frac{(z-2i)^5}{2} \left(1 - \frac{z-2i}{8} \right) e^{\frac{-(z-2i)}{4}}$$

pro každé $z \in \mathbb{C}$ (poloměr konvergence je tedy $R = \infty$, střed řady je $2i$).