

Komplexní analýza 2025/2026

Dobrovolná domácí cvičení 5, řešení

Úloha 1. Potřebujeme ověřit, zda leží bod $z = 5 + 8i$ v předepsaném mezikruží konvergence. Jest

$$\left| z - 5i \right|_{z=5+8i} = |5 + 3i| = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}.$$

Vidíme, že $\sqrt{34} < 8 = r$, neboť (např.) $\sqrt{34} < \sqrt{36} = 6 < 8$. Vzdálenost bodu $z = 5 + 8i$ od středu $z_0 = 5i$ dané Laurentovy řady je tedy menší než její vnitřní poloměr konvergence. Laurentova řada tedy ve zkoumaném bodě nekonverguje.

Úloha 2. Jest

$$f(z) = \frac{(z+i)^3}{(3z-2)^2} = (z+i)^3 \frac{1}{(3z-2)^2}. \quad (1)$$

Potřebujeme tedy najít rozvoj $\frac{1}{(3z-2)^2}$ do mocninné řady se středem v $-i$. Ten najdeme tak, že nejprve najdeme rozvoj pro $\frac{1}{3z-2}$, který potom vhodným způsobem zderivujeme. Připomeňme si známý součet geometrické řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{pro } |z| < 1. \quad (\text{GEOM})$$

S jeho pomocí máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{3z-2} &= \frac{1}{3(z+i)-3i-2} = -\frac{1}{3i+2} \frac{1}{1 - \left(\frac{3(z+i)}{3i+2}\right)} = -\frac{1}{3i+2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3(z+i)}{3i+2}\right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(3i+2)^{n+1}} (z+i)^n \end{aligned} \quad (2)$$

pro

$$\begin{aligned} \left| \frac{3(z+i)}{3i+2} \right| &< 1 \\ |z+i| &< \frac{|3i+2|}{3} = \frac{\sqrt{13}}{3}. \end{aligned}$$

Protože

$$\left(\frac{1}{3z-2}\right)' = -\frac{3}{(3z-2)^2},$$

jest díky (2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(3z-2)^2} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3z-2}\right)' = -\frac{1}{3} \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(3i+2)^{n+1}} (z+i)^n\right)' = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3i+2)^{n+1}} n(z+i)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(3i+2)^{n+1}} n(z+i)^{n-1}. \end{aligned}$$

Dosažením zpět do (1) tedy dostaneme

$$f(z) = (z+i)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(3i+2)^{n+1}} n(z+i)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(3i+2)^{n+1}} n(z+i)^{n+2}$$

pro $|z+i| < \frac{\sqrt{13}}{3}$ (poloměr konvergence je $R = \frac{\sqrt{13}}{3}$).

Úloha 3. Začneme tím, že si faktorizujeme kvadratický polynom ve jmenovateli. Snadno zjistíme, že $z^2 + z - 6 = (z+3)(z-2)$. Takže

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + z - 6)^3} = \frac{1}{(z-2)^3} \frac{1}{(z+3)^3}. \quad (3)$$

Potřebujeme tedy najít rozvoj $\frac{1}{(z+3)^3}$ do Laurentovy řady se středem ve 2. Ten najdeme tak, že nejprve najdeme rozvoj pro $\frac{1}{z+3}$, který potom vhodným způsobem zderivujeme. S pomocí (GEOM) máme

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{5+(z-2)} = \frac{1}{5} \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-2}{5}\right)} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} (z-2)^n \quad (4)$$

pro

$$\left| -\frac{z-2}{5} \right| < 1 \\ |z-2| < 5.$$

Protože

$$\left(\frac{1}{z+3}\right)'' = \left(-\frac{1}{(z+3)^2}\right)' = \frac{2}{(z+3)^3},$$

jest díky (4)

$$\frac{1}{(z+3)^3} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} (z-2)^n \right)'' = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} n(n-1) (z-2)^{n-2}.$$

Dosažením zpět do (3) tedy dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{(z-2)^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} n(n-1) (z-2)^{n-2} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} n(n-1) (z-2)^{n-5}$$

pro $|z-2| < 5$. (prstencové okolí bodu 2 má poloměr $R=5$).