

# Komplexní analýza 2025/2026

## Dobrovolná domácí cvičení 6, řešení

**Úloha 1.** Jest

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{4}{(z-1)^7} + \frac{3}{(z-1)^4} + \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{4}{(z-1)^7} - \frac{3}{(z-1)^4} - \frac{2}{z-1} - (z-1)^2 + \dots \\ &= \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{2}{z-1} - (z-1)^2 + \dots \end{aligned}$$

pro  $z \in P(1)$ , kde  $+\dots$  obsahuje pouze nezáporné mocniny  $(z-1)$ , které jsou pro klasifikaci izolované singularity irelevantní. Vidíme, že Laurentův rozvoj funkce  $f(z)$  na prstencovém okolí zkoumané izolované singularity obsahuje konečně mnoho záporných mocnin  $(z-1)$  a nejmenší z nich je  $(-2)$ . Jedná se tedy o pól řádu 2.

**Úloha 2.** Nejprve určíme, kolika násobný kořen jmenovatele je 0. Jest:

$$\begin{aligned} \sin(z^2) - 2 + 2 \cos z \Big|_{z=0} &= 0 - 2 + 2 = 0 \\ (\sin(z^2) - 2 + 2 \cos z)' \Big|_{z=0} &= 2z \cos(z^2) - 2 \sin z \Big|_{z=0} = 0 \\ (\sin(z^2) - 2 + 2 \cos z)'' \Big|_{z=0} &= (2z \cos(z^2) - 2 \sin z)' \Big|_{z=0} = 2 \cos(z^2) - 4z^2 \sin(z^2) - 2 \cos z \Big|_{z=0} \\ &= 2 - 2 = 0 \\ (\sin(z^2) - 2 + 2 \cos z)''' \Big|_{z=0} &= (2 \cos(z^2) - 4z^2 \sin(z^2) - 2 \cos z)' \Big|_{z=0} = -4z \sin(z^2) - 8z \sin(z^2) - 8z^3 \cos(z^2) + 2 \sin z \Big|_{z=0} \\ &= -12z \sin(z^2) - 8z^3 \cos(z^2) + 2 \sin z \Big|_{z=0} = 0 \\ (\sin(z^2) - 2 + 2 \cos z)^{(4)} \Big|_{z=0} &= (-12z \sin(z^2) - 8z^3 \cos(z^2) + 2 \sin z)' \Big|_{z=0} \\ &= -12 \sin(z^2) - 24z^2 \cos(z^2) - 24z^2 \cos(z^2) + 16z^4 \sin(z^2) + 2 \cos z = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

Bod 0 je tedy 4-násobný kořen jmenovatele. Co se týče čitatele, jest:

$$\begin{aligned} \sin z - \cos z - e^z + 2 \Big|_{z=0} &= 0 - 1 - 1 + 2 = 0 \\ (\sin z - \cos z - e^z + 2)' \Big|_{z=0} &= \cos z + \sin z - e^z \Big|_{z=0} = 1 + 0 - 1 = 0 \\ (\sin z - \cos z - e^z + 2)'' \Big|_{z=0} &= (\cos z + \sin z - e^z)' \Big|_{z=0} = -\sin z + \cos z - e^z \Big|_{z=0} = 0 + 1 - 1 = 0 \\ (\sin z - \cos z - e^z + 2)''' \Big|_{z=0} &= (-\sin z + \cos z - e^z)' \Big|_{z=0} = -\cos z - \sin z - e^z \Big|_{z=0} = -1 - 0 - 1 = -2 \neq 0 \end{aligned}$$

Bod 0 je tedy 3-násobný kořen čitatele.

Porovnáním násobností kořene v čitateli a jmenovateli dostaneme, že bod 0 je pól řádu  $4 - 3 = 1$ .

**Úloha 3.** Nejprve potřebujeme zjistit, co jsou izolované singularity funkce  $f$ . Jest

$$\begin{aligned} e^{\frac{\pi}{2}iz} &= -i \\ e^{\frac{\pi}{2}iz} &= e^{-\frac{\pi}{2}i} \\ \frac{\pi}{2}iz &= -\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i \\ z &= -1 + 4k \end{aligned}$$

pro  $k \in \mathbb{Z}$ . Všechny izolované singularity jsou tedy body  $z = -1 + 4k$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ . Máme

$$\begin{aligned} e^{\frac{\pi}{2}iz} + i \Big|_{z=-1+4k} &= 0 \\ (e^{\frac{\pi}{2}iz} + i)' \Big|_{z=-1+4k} &= \frac{\pi}{2} i e^{\frac{\pi}{2}iz} \Big|_{z=-1+4k} = \frac{\pi}{2} i(-i) = \frac{\pi}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

Body  $z = -1 + 4k$  jsou 1-násobné kořeny  $e^{\frac{\pi}{2}iz} + i$ , a tedy  $4 \cdot 1 = 4$ -násobné kořeny  $(e^{\frac{\pi}{2}iz} + i)^4$ .

Vidíme, že bod  $z = -5$ , což odpovídá  $k = -1$ , je jednonásobný kořen  $(z + 5)$ . Dále

$$\sin(2\pi z) \Big|_{z=-1+4k} = \sin(-2\pi + 8k\pi) = 0$$

$$(\sin(2\pi z))' \Big|_{z=-1+4k} = 2\pi \cos(2\pi z) \Big|_{z=-1+4k} = 2\pi \cos(-2\pi + 8k\pi) = 2\pi \neq 0,$$

takže jsou to 1-násobné kořeny  $\sin(2\pi z)$ , a tedy  $3 \cdot 1 = 3$ -násobné kořeny  $\sin^3(2\pi z)$ . Co se týče čitatele, zjistili jsme tedy, že bod  $-5$  je  $1+3 = 4$ -násobný kořen čitatele a body  $-1+4k$  pro  $k \neq -1$  jsou 3-násobné kořeny čitatele.

Celkem tedy: bod  $-5$  je 4-násobný kořen čitatele i jmenovatele, a je to tedy odstranitelná singularita; body  $-1+4k$  pro  $k \neq -1$  jsou 3 násobné kořeny čitatele a 4-násobné kořeny jmenovatele, takže jsou to póly řádu  $4 - 3 = 1$ .