

Komplexní analýza 2025/2026

Dobrovolná domácí cvičení 7, řešení

Úloha 1. Máme

$$\frac{\alpha}{(z+i)^k} + \frac{3}{(z+i)^2} - \frac{2}{z+i} + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)^2 (z+i)^{2n-7} = \frac{\alpha}{(z+i)^k} + \frac{3}{(z+i)^2} - \frac{2}{z+i} + \frac{9}{(z+i)^3} + \frac{16}{z+i} + \dots,$$

kde $+\dots$ již obsahuje pouze nezáporné mocniny $(z+i)$. Zvolíme-li tedy $k=1$, jest

$$\operatorname{res}_{-i} \left(\frac{\alpha}{z+i} + \frac{3}{(z+i)^2} - \frac{2}{z+i} + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)^2 (z+i)^{2n-7} \right) = \alpha - 2 + 16 = \alpha + 14.$$

Potřebujeme tedy zvolit

$$\begin{aligned} \alpha + 14 &= 3 \\ \alpha &= -11. \end{aligned}$$

Úloha 2. Nejprve klasifikujeme typ izolované singularity v bodě $\frac{\pi}{2}$. Bod $\frac{\pi}{2}$ je zřejmě 2-násobný kořen faktoru $(z - \frac{\pi}{2})^2$ ve jmenovateli. Dále:

$$\begin{aligned} \cos z \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} &= 0 \\ (\cos z)' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} &= -\sin z \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -1 \neq 0 \end{aligned}$$

Bod $\frac{\pi}{2}$ je tedy 1-násobný kořen $\cos z$. Celkem je bod $\frac{\pi}{2}$ tedy $2+1=3$ -násobný kořen jmenovatele. Co se týče čitatele, jest:

$$\begin{aligned} e^{iz} - i + \sin \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} &= i - i + 0 = 0 \\ \left(e^{iz} - i + \sin \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \right)' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} &= ie^{iz} + \cos \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = i^2 + 1 = 0 \\ \left(e^{iz} - i + \sin \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \right)'' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} &= \left(ie^{iz} + \cos \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \right)' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -e^{iz} - \sin \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -i - 0 \neq 0 \end{aligned}$$

Bod $\frac{\pi}{2}$ je tedy 2-násobný kořen čitatele.

Porovnáním násobností kořene v čitateli a jmenovateli dostaneme, že bod $\frac{\pi}{2}$ je pól řádu $3-2=1$. Dle limitního vzorečku pro výpočet rezidua v pólu řádu 1 tedy jest¹

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz} - i + \sin(z - \frac{\pi}{2})}{(z - \frac{\pi}{2})^2 \cos z} &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \frac{e^{iz} - i + \sin(z - \frac{\pi}{2})}{(z - \frac{\pi}{2})^2 \cos z} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz} - i + \sin(z - \frac{\pi}{2})}{(z - \frac{\pi}{2}) \cos z} \stackrel{„LH“}{=} \\ &\stackrel{„LH“}{=} \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{ie^{iz} + \cos(z - \frac{\pi}{2})}{\cos z - (z - \frac{\pi}{2}) \sin z} \stackrel{„LH“}{=} \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-e^{iz} - \sin(z - \frac{\pi}{2})}{-\sin z - \sin z - (z - \frac{\pi}{2}) \cos z} \\ &= \frac{-i}{-2} = \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Úloha 3. Označme si jako I integrál ze zadání. Z obrázku vidíme, že bod -1 leží mimo křivku C , a tedy

$$\int_C \frac{\sin z}{(z+1)^4} dz = 0$$

dle Cauchyovy věty. Takže

$$I = \int_C \frac{z - \frac{\pi}{2}i}{e^z - i} dz + \int_C \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} dz. \quad (1)$$

¹Uvědomme si, že ačkoli se jedná o pól řádu 1, nelze použít „dosazovací metodu“, neboť bod $\frac{\pi}{2}$ není jednonásobný kořen jmenovatele.

Jest

$$\begin{aligned}e^z &= i \\e^z &= e^{\frac{\pi}{2}i} \\z &= \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i\end{aligned}$$

pro $k \in \mathbb{Z}$. Z obrázku vidíme, že jediný z těchto bodů, který leží uvnitř C , je bod $\frac{\pi}{2}i$. Dle reziduové věty tedy je

$$\int_C \frac{z - \frac{\pi}{2}i}{e^z - i} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}i} \frac{z - \frac{\pi}{2}i}{e^z - i}.$$

Vidíme, že bod $\frac{\pi}{2}i$ je jednonásobný kořen čitatele. Co se týče jmenovatele, jest

$$\begin{aligned}e^z - i \Big|_{z=\frac{\pi}{2}i} &= 0 \\(e^z - i)' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}i} &= e^z \Big|_{z=\frac{\pi}{2}i} = i \neq 0,\end{aligned}$$

takže se jedná i o jednonásobný kořen jmenovatele. Je to tedy odstranitelná singularita, a tedy

$$\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}i} \frac{z - \frac{\pi}{2}i}{e^z - i} = 0.$$

Takže

$$\int_C \frac{z - \frac{\pi}{2}i}{e^z - i} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}i} \frac{z - \frac{\pi}{2}i}{e^z - i} = 0.$$

Dosažením do (1) tedy dostaneme

$$I = \int_C \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} dz. \quad (2)$$

Izolované singularity integrované funkce jsou zřejmě body $\pm i$, přičemž pouze bod i leží uvnitř C . Takže

$$\int_C \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}. \quad (3)$$

Z rozkladu $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ okamžitě vidíme, že bod i je dvojnásobný pól, a tedy

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_i \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} &= \lim_{z \rightarrow i} \left((z - i)^2 \frac{z^2}{(z - i)^2(z + i)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{z^2}{(z + i)^2} \right)' \\&= \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z(z + i)^2 - 2z^2(z + i)}{(z + i)^4} = 2i \frac{2i - i}{(2i)^3} = -\frac{i}{4}.\end{aligned}$$

A tedy, díky (2) a (3),

$$I = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$