

Komplexní analýza 2025/2026
Dobrovolná domácí cvičení 9, řešení

Úloha 1. Funkce f je rovná 1 na intervalu $[-9, -7]$ a jinde je nulová. Z definice Fourierovy transformace tedy je

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-9}^{-7} e^{-i\omega t} dt.$$

Pro $\omega \neq 0$ tedy máme

$$\hat{f}(\omega) = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{t=-9}^{-7} = \frac{1}{-i\omega} (e^{7i\omega} - e^{9i\omega}) = \frac{e^{7i\omega} - e^{9i\omega}}{\omega} i.$$

Pro $\omega = 0$ máme

$$\hat{f}(0) = \int_{-9}^{-7} dt = 2.$$

Úloha 2. Jest

$$\mathcal{F}[\cos(4t)h''(3t+2) + te^{-6(3t-1)^2}](\omega) = \mathcal{F}[\cos(4t)h''(3t+2)](\omega) + \mathcal{F}[te^{-6(3t-1)^2}](\omega).$$

Začneme prvním obrazem. Připomeňme si, že $\cos(4t) = \frac{e^{4it} + e^{-4it}}{2}$. Díky tomu

$$\mathcal{F}[\cos(4t)h''(3t+2)](\omega) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}[e^{4it}h''(3t+2)](\omega) + \mathcal{F}[e^{-4it}h''(3t+2)](\omega)).$$

Za využití pravidla o posunu obrazu

$$\mathcal{F}[e^{4it}h''(3t+2)](\omega) = \mathcal{F}[h''(3t+2)](\omega - 4).$$

Dle pravidla o dilataci vzoru máme

$$\mathcal{F}[h''(3t+2)](\omega - 4) = \frac{1}{3} \mathcal{F}[h''(t+2)]\left(\frac{\omega - 4}{3}\right).$$

Dále využijeme pravidla o posunu vzoru

$$\frac{1}{3} \mathcal{F}[h''(t+2)]\left(\frac{\omega - 4}{3}\right) = \frac{1}{3} e^{2i\frac{\omega-4}{3}} \mathcal{F}[h''(t)]\left(\frac{\omega - 4}{3}\right).$$

Nakonec využijeme pravidlo o obrazu derivace

$$\frac{1}{3} e^{2i\frac{\omega-4}{3}} \mathcal{F}[h''(t)]\left(\frac{\omega - 4}{3}\right) = \frac{1}{3} e^{2i\frac{\omega-4}{3}} \left(i\frac{\omega - 4}{3}\right)^2 \hat{h}\left(\frac{\omega - 4}{3}\right) = -\frac{e^{2i\frac{\omega-4}{3}}}{27} (\omega - 4)^2 \hat{h}\left(\frac{\omega - 4}{3}\right).$$

Tedy

$$\mathcal{F}[e^{4it}h''(3t+2)](\omega) = -\frac{e^{2i\frac{\omega-4}{3}}}{27} (\omega - 4)^2 \hat{h}\left(\frac{\omega - 4}{3}\right).$$

Analogicky máme

$$\mathcal{F}[e^{-4it}h''(3t+2)](\omega) = \mathcal{F}[h''(3t+2)](\omega + 4) = \frac{1}{3} e^{2i\frac{\omega+4}{3}} \mathcal{F}[h''(t)]\left(\frac{\omega + 4}{3}\right) = -\frac{e^{2i\frac{\omega+4}{3}}}{27} (\omega + 4)^2 \hat{h}\left(\frac{\omega + 4}{3}\right).$$

Celkem tedy

$$\mathcal{F}[\cos(4t)h''(3t+2)](\omega) = -\frac{1}{27} \left(e^{2i\frac{\omega-4}{3}} (\omega - 4)^2 \hat{h}\left(\frac{\omega - 4}{3}\right) + e^{2i\frac{\omega+4}{3}} (\omega + 4)^2 \hat{h}\left(\frac{\omega + 4}{3}\right) \right).$$

Co se týče obrazu $\mathcal{F}[te^{-6(3t-1)^2}](\omega)$, první použijeme pravidlo o derivaci obrazu. Tedy

$$\mathcal{F}[te^{-6(3t-1)^2}](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[e^{-6(3t-1)^2}](\omega). \quad (1)$$

Potřebujeme určit $\mathcal{F}[e^{-6(3t-1)^2}](\omega)$. Budeme chtít využít známého obrazu Gaussovy funkce. Nejprve použijeme pravidlo o škálování¹

$$\mathcal{F}[e^{-6(3t-1)^2}](\omega) = \frac{1}{3} \mathcal{F}[e^{-6(t-1)^2}]\left(\frac{\omega}{3}\right).$$

¹S pomocnou funkcí $f(t)$ rovnou $f(t) = e^{-6(t-1)^2}$. Při této volbě je $\mathcal{F}[e^{-6(3t-1)^2}](\omega) = \mathcal{F}[f(3t)](\omega)$.

Dále použijeme pravidlo o posunu vzoru² a známý obraz Gaussovy funkce

$$\frac{1}{3}\mathcal{F}[e^{-6(t-1)^2}]\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\omega}{3}}\mathcal{F}[e^{-6t^2}]\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{e^{-i\frac{\omega}{3}}}{3}\sqrt{\frac{\pi}{6}}e^{-\frac{(\frac{\omega}{3})^2}{24}} = \frac{e^{-i\frac{\omega}{3}}}{3}\sqrt{\frac{\pi}{6}}e^{-\frac{\omega^2}{216}}.$$

Dosazením zpět do (1) tedy dostaneme

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[te^{-6(3t-1)^2}](\omega) &= i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{e^{-i\frac{\omega}{3}}}{3}\sqrt{\frac{\pi}{6}}e^{-\frac{\omega^2}{216}}\right) = \frac{i}{3}\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(-\frac{i}{3}e^{-i\frac{\omega}{3}}e^{-\frac{\omega^2}{216}} - \frac{\omega}{108}e^{-i\frac{\omega}{3}}e^{-\frac{\omega^2}{216}}\right) \\ &= -\frac{i}{3}\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{i}{3} + \frac{\omega}{108}\right)e^{-i\frac{\omega}{3}}e^{-\frac{\omega^2}{216}}.\end{aligned}$$

Úloha 3. Na rovnici aplikujeme Fourierovu transformaci a využijeme pravidla o obrazu derivace, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}(i\omega)^3\hat{y}(\omega) - 5i\omega\hat{y}(\omega) + 3\hat{y}(\omega) &= \frac{1}{5+i\omega} \\ (-i\omega^3 - 5i\omega + 3)\hat{y}(\omega) &= \frac{1}{5+i\omega} \\ \hat{y}(\omega) &= \frac{1}{(-i\omega^3 - 5i\omega + 3)(5+i\omega)}.\end{aligned}$$

²S pomocnou funkcí $f(t)$ rovnou $f(t) = e^{-6t^2}$. Při této volbě je $\mathcal{F}[e^{-6(t-1)^2}](\frac{\omega}{3}) = \mathcal{F}[f(t-1)](\frac{\omega}{3})$.