

Komplexní analýza a transformace

Písemná část zkoušky (15.01.2026)

Identifikační číslo: X

Jméno:

Podpis:

Příklad	1.	2.	3.	4.	Σ
Body					

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno“ a podepište se.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.
- Pro $a > 0$ je $\mathcal{F} \left[e^{-at^2} \right] (\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathcal{L} [t^n] (s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{L} [e^{at}] (s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{L} [\sin(\omega t)] (s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ a $\mathcal{L} [\cos(\omega t)] (s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{Z} [\alpha^n] (z) = \frac{z}{z-\alpha}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{Z} [\sin(\alpha n)] (z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$ a $\mathcal{Z} [\cos(\alpha n)] (z) = \frac{z^2 - z \cos \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$.
- $\mathcal{Z} [n] (z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.

Zadání

1. [10 bodů] Jsou dány kružnice $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$ a lineární lomené zobrazení

$$f(z) = \frac{z - 3}{z + \alpha},$$

kde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-3\}$.

(a) Nalezněte všechny hodnoty parametru α tak, aby $f(K)$ byla kružnice se středem 0. Pro tyto hodnoty α dále určete poloměr kružnice $f(K)$.

(b) Existuje α tak, aby $f(K) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\} \cup \{\infty\}$?

2. [10 bodů] Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 6x + 25} dx.$$

3. [10 bodů] Nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+2} - y_n = \frac{n}{2^n}$$

vyhovující počátečním podmínkám $y_0 = y_1 = 0$.

4. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(t) = t(\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 2)).$$

(a) Nalezněte $\hat{f}(\omega)$.

(b) Určete Fourierovu řadu zúžení funkce f na interval $[0, 4)$.

(c) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $h(t) = (f * g)(t)$, kde $g(t) = te^{-t^2}$.