

Komplexní analýza a transformace

Písemná část zkoušky (12.02.2026)

Jméno:

Podpis:

Příklad	1.	2.	3.	4.	Σ
Body					

Před zahájením práce

- Vyplníte čitelně rubriku „Jméno“ a podepište se.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.
- Pro $a > 0$ je $\mathcal{F} \left[e^{-at^2} \right] (\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathcal{L} [t^n] (s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{L} [e^{at}] (s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{L} [\sin(\omega t)] (s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ a $\mathcal{L} [\cos(\omega t)] (s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{Z} [\alpha^n] (z) = \frac{z}{z-\alpha}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{Z} [\sin(\alpha n)] (z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$ a $\mathcal{Z} [\cos(\alpha n)] (z) = \frac{z^2 - z \cos \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$.
- $\mathcal{Z} [n] (z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.

Zadání

1. [10 bodů] Je dáno lineární lomené zobrazení

$$f(z) = \frac{2z + i}{z - i}.$$

- (a) Nalezněte množinu $f(M)$, kde $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
(b) Nalezněte množinu $f(N)$, kde $N = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$.

2. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(z) = 1 - \cos(2z^2).$$

- (a) Nalezněte rozvoj funkce f do mocninné řady se středem v bodě 0 a určete její poloměr konvergence.
(b) V závislosti na k určete typ izolované singularity funkce $g(z) = \frac{f(z)}{z^k}$ v bodě 0. Dále nalezněte $\text{res}_0 g(z)$ pro případy $k = 8$ a $k = 9$.

3. [10 bodů] Je dána posloupnost

$$(a_n)_{n=0}^\infty = (i^n)_{n=0}^{+\infty} * \left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right)_{n=0}^\infty.$$

- (a) Nalezněte Z -transformaci $A(z)$ posloupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty$.
(b) Nalezněte posloupnost $(a_n)_{n=0}^\infty$. (Nápověda: Využijte výsledek z bodu (a).)
(c) Nalezněte $\mathcal{Z}[a_{n+2}](z)$.

4. [10 bodů] Fourierova transformace spojitě funkce $h \in L^1(\mathbb{R})$ je

$$\hat{h}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 + 16}.$$

Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - y(t) = h(t).$$