

1. semestrální test (varianta A)

Jméno a příjmení:

Odpovědi zdůvodněte!

1. [7 bodů]

- (a) Nalezněte reálnou a imaginární část čísla $\ln \frac{1+i}{1+i^7}$.
- (b) Z definice vypočtete křivkový integrál

$$\int_C z^3 - 3\bar{z} \, dz,$$

kde C je půlkružnice $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ s počátečním bodem $-i$ a koncovým bodem i .

2. [8 bodů]

- (a) Nalezněte rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{z^2}$ do mocninné řady na co největším okolí bodu $1 - i$ a určete poloměr tohoto okolí.
- (b) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^3}$.

1. semestrální test (varianta B)

Jméno a příjmení:

Odpovědi zdůvodněte!

1. [7 bodů]

- (a) Nalezněte goniometrický tvar komplexního čísla $a = \sin i$;
- (b) Rozhodněte, zda je funkce $f(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{1-i\operatorname{Re} z}$ diferencovatelná v bodě $z = i$.

2. [8 bodů]

- (a) Nalezněte rozvoj funkce $f(z) = \frac{1}{z^2+2z}$ do Laurentovy řady na co největším okolí nekonečna a toto okolí určete.
- (b) Vypočtete $\operatorname{res}_1 \frac{2z+3}{z(z-1)^2}$.

2. semestrální test (varianta A)

Jméno a příjmení:

Odpovědi zdůvodněte!

1. [7 bodů] Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 - 4x + 5} dx.$$

2. [8 bodů] Je dána funkce

$$F(s) = \frac{1}{s^3 - s}.$$

- (a) Nalezněte Laplaceův vzor funkce $F(s)$.
(b) Nalezněte Laplaceův vzor funkce $G(s) = e^{-2s}F(s)$.

2. semestrální test (varianta B)

Jméno a příjmení:

Odpovědi zdůvodněte!

1. [7 bodů] Vypočtěte

$$\int_C \frac{\cos(\pi z)}{z^3 + z^2 - 2z} dz,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z - 1| = 2$.

2. [8 bodů] Je dána posloupnost $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } n \text{ je sudé;} \\ 2^n, & \text{jestliže } n \text{ je liché.} \end{cases}$$

- (a) Nalezněte Z -transformaci posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$.
(b) Nalezněte Z -transformaci posloupnosti

$$(b_n)_{n=0}^{+\infty} = (a_{n+2})_{n=0}^{+\infty} + (a_n)_{n=0}^{+\infty} * (a_n)_{n=0}^{+\infty}.$$

Stručná řešení

1. semestrální test (varianta A)

1. (a)

$$\ln \frac{1+i}{1+i^7} = \ln \frac{1+i}{1-i} = \ln i = i\frac{\pi}{2}.$$

Tedy $\operatorname{Re} \left(\ln \frac{1+i}{1+i^7} \right) = 0$ a $\operatorname{Im} \left(\ln \frac{1+i}{1+i^7} \right) = \frac{\pi}{2}$.

(b) Parametrizace křivky C je například $\varphi(t) = e^{it}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Tedy

$$\int_C z^3 - 3\bar{z} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{3it} - 3e^{-it}) ie^{it} dt = i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{4it} - 3 dt = -3i\pi.$$

2. (a) Protože

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1+i)+1-i} = \frac{1}{1-i} \frac{1}{1+\frac{z-1+i}{1-i}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}} (z-1+i)^n$$

pro $|z-1+i| < \sqrt{2}$, je

$$\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{(1-i)^{n+1}} (z-1+i)^{n-1}$$

pro $|z-1+i| < \sqrt{2}$.

(b) Jediná izolovaná singularita funkce $f(z)$ je 0. Protože 0 je kořen násobnosti 2 funkce $g(z) = \sin(z^2)$ (neboť $g'(0) = 0$ a $g''(0) = 2 \neq 0$) a kořen násobnosti 3 funkce z^3 , je 0 pól řádu 1 funkce $f(z)$. (Lze odůvodnit i jinak. Například tím, že $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{z^3}{3!} + \dots$, kde tři tečky označují členy s vyšší než třetí mocninou z , je Laurentův rozvoj $f(z)$ na $P(0)$.)

1. semestrální test (varianta B)

1. (a) Protože $a = \frac{e^{-1}-e}{2i} = \frac{e^2-1}{2e}i$, je

$$a = \frac{e^2-1}{2e} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(b) Reálná a imaginární část funkce $f(z)$ jsou $u(x, y) = \frac{y}{1+x^2}$ a $v(x, y) = \frac{xy}{1+x^2}$. Protože

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, 1) = 1 \neq -1 = -\frac{\partial v}{\partial x}(0, 1),$$

není $f(z)$ diferencovatelná v bodě $z = i$.

2. (a)

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{z^{n+2}}$$

pro $|z| > 2$.

(b)

$$\operatorname{res}_1 \frac{2z+3}{z(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{2z+3}{z} \right)' = -3.$$

2. semestrální test (varianta A)

1. Protože $z^2 - 4z + 5 = 0$ právě tehdy, když $z = 2 \pm i$, je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 - 4x + 5} dx = -2\pi i \operatorname{res}_{2-i} \frac{e^{-iz}}{z^2 - 4z + 5} = \frac{\pi}{e} e^{-2i}.$$

2. (a)

$$f(t) = \operatorname{res}_0 F(s)e^{st} + \operatorname{res}_1 F(s)e^{st} + \operatorname{res}_{-1} F(s)e^{st} = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}.$$

- (b) Protože $G(s) = \mathcal{L}[f(t-2)\mathbf{1}(t-2)](s)$, je

$$g(t) = f(t-2)\mathbf{1}(t-2) = \left[-1 + \frac{1}{2}e^{t-2} + \frac{1}{2}e^{-(t-2)}\right]\mathbf{1}(t-2).$$

2. semestrální test (varianta B)

1. Ať $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z^3 + z^2 - 2z}$. Funkce $f(z)$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{-2, 0, 1\}$ a body $-2, 0, 1$ jsou póly řádu jedna funkce $f(z)$. Proto

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{res}_0 f(z) + \operatorname{res}_1 f(z)] = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3}\pi i.$$

2. (a)

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}}{z^{2n+1}} = \frac{2}{z} \frac{1}{1 - \frac{4}{z^2}} = \frac{2z}{z^2 - 4}.$$

- (b)

$$B(z) = z^2 \left[A(z) - a_0 - \frac{a_1}{z}\right] + A(z)^2 = \frac{2z^3}{z^2 - 4} - 2z + \frac{4z^2}{(z^2 - 4)^2}.$$