

Komplexní analýza a transformace

Písemná část zkoušky (XX.XX.XXXX)

Jméno:

Podpis:

Příklad	1.	2.	3.	4.	Σ
Body					

Před zahájením práce

- Vyplňte čitelně rubriku „Jméno“ a podepište se.
- Během písemné zkoušky smíte mít na lavici pouze zadání písemky, psací potřeby, průkaz totožnosti a papíry, na které zkoušku vypracováváte.
- Nepište obyčejnou tužkou ani červeně, jinak písemka nebude přijata.
- **Veškeré své odpovědi zdůvodněte.**

Soupis vybraných vzorců

- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$ pro každé $z, w \in \mathbb{C}$.
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.
- $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ pro $|z-1| < 1$.
- Pro $a > 0$ je $\mathcal{F} \left[e^{-at^2} \right] (\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$.
- Pro $n \in \mathbb{N}_0$ je $\mathcal{L} [t^n] (s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.
- Pro $a \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{L} [e^{at}] (s) = \frac{1}{s-a}$.
- Pro $\omega \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{L} [\sin(\omega t)] (s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ a $\mathcal{L} [\cos(\omega t)] (s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{Z} [\alpha^n] (z) = \frac{z}{z-\alpha}$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{Z} [\sin(\alpha n)] (z) = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$ a $\mathcal{Z} [\cos(\alpha n)] (z) = \frac{z^2 - z \cos \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$.
- $\mathcal{Z} [n] (z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.

Zadání A

1. [10 bodů] Je dáno lineární lomené zobrazení

$$f(z) = \frac{1}{z + 2i}.$$

- (a) Nalezněte obraz $f(M)$ množiny

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}.$$

- (b) Určete rozvoj funkce $f(z)$ do mocninné řady na co největším okolí bodu $z_0 = 2$ a určete poloměr tohoto okolí.

2. [10 bodů] Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x-1)(x^2+4)} dx$$

3. [10 bodů] At $a_n = 0$ pro všechna $n \geq 2$, $a_0 = 3$ a $a_1 = -4$. Pomocí Z-transformace nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k y_{n-k} = 2(-1)^n$$

vyhovující počáteční podmínce $y_0 = -1$.

4. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(t) = e^t [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)].$$

- (a) Vypočtěte $\hat{f}(\omega)$.

- (b) Nalezněte Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f'(1-t)e^{it}$.

- (c) Stanovte Fourierovu řadu zúžení funkce $f(t)$ na interval $[-1, 1)$.

Zadání B

1. [10 bodů] Je dána funkce

$$u(x, y) = e^{-2x} \sin(\alpha y) + x(x^2 - 3y^2 - 2).$$

- (a) Nalezněte všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby $u(x, y)$ byla harmonická funkce na $\mathbb{R}^2$.
- (b) Pro nejmenší hodnotu parametru α z bodu (a) nalezněte funkci $v(x, y)$ tak, aby $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ byla celistvá a $f\left(i\frac{\pi}{4}\right) = -1 - i\frac{\pi}{2}$.

2. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(z) = \frac{3}{z^4(2z^2 - z - 1)}.$$

- (a) Nalezněte rozvoj funkce $f(z)$ do Laurentovy řady na $P(0)$ a určete mezikruží konvergence této řady.
- (b) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $f(z)$ a určete $\text{res}_0 f(z)$.
- (c) Nalezněte funkci $g(z)$ tak, aby funkce $h(z) = f(z) + g(z)$ měla v 0 pól řádu 3 a $\text{res}_0 h(z) = 1$.

3. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0, \pi); \\ -e^{-t+\pi}, & t \geq \pi. \end{cases}$$

- (a) Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce $f(t)$.
- (b) Stanovte Laplaceovu transformaci funkce $g(t) = e^{-2t} f'(3t)$.

4. [10 bodů] Fourierova transformace spojitě funkce $h \in L^1(\mathbb{R})$ je

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 3i\omega - 2}.$$

Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) - 4y(t) = h(t).$$

Zadání C

1. [10 bodů] Je dáno lineární lomené zobrazení

$$f(z) = \frac{z - 2i}{z + \alpha},$$

kde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$.

- (a) Nalezněte inverzní zobrazení k zobrazení f .
- (b) Stanovte α tak, aby existovala kružnice K se středem v bodě $-i$ taková, že $f(K) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$. Dále určete poloměr kružnice K .

2. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(z) = \frac{z^2 - z - 2}{1 - \cos(\pi z)}.$$

- (a) Klasifikujte všechny izolované singularity funkce $f(z)$.
- (b) Ať C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 1$. Vypočtete

$$\int_C z f(z) \, dz.$$

3. [10 bodů] Z-transformace posloupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty \in Z_0$ je

$$A(z) = \frac{1}{3 + 2z} - \ln \left(1 - \frac{3}{z} \right).$$

- (a) Nalezněte rozvoj funkce $A(z)$ do Laurentovy řady na $U(\infty)$ a určete mezikružní konvergence této řady.
- (b) Určete posloupnost $(a_n)_{n=0}^\infty$.
- (c) Stanovte $\mathcal{Z}[4^n a_{n+2}](z)$.

4. [10 bodů] Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení rovnice

$$y''(t) + y'(t) - 6y(t) = e^{-2t} [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 2)]$$

vyhovující počátečním podmínkám $y(0) = 1$ a $y'(0) = 2$.

Zadání D

1. [10 bodů] Ať $f(z)$ je součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} z^{n+2}$$

na kruhu konvergence.

(a) Určete funkci $f(z)$ a také poloměr konvergence zadané řady.

(b) Stanovte $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $\operatorname{res}_0 \frac{f(z)}{z^k} = \frac{1}{8}$.

2. [10 bodů] Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+1} dx$$

3. [10 bodů] Pomocí Z-transformace nalezněte řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} + y_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2^n}$$

vyhovující počáteční podmínce $y_0 = 1$.

4. [10 bodů] Je dána funkce

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 - 9)(1 - e^{-4s})}.$$

(a) Metodou reziduí nalezněte Laplaceův vzor $f(t)$ funkce $F(s)$ ve tvaru Fourierovy řady.

(b) Nalezněte Laplaceův obraz funkce $f * g$, kde f je funkce z bodu (a) a $g(t) = e^{-2t} f(3t)$.

Stručné řešení

Zadání A

1. (a) At $C = \partial M$. Protože $-2i \in C$, je $f(C)$ přímka spolu s nekonečnem. Zřejmě

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{f} & -\frac{i}{2} \\ \uparrow C & & \downarrow f(C) \\ \infty & \xrightarrow{f} & 0 \end{array}$$

Tedy $f(C) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = -\frac{1}{4}\} \cup \{\infty\}$. Protože $f(0) = -\frac{i}{2}$, je

$$f(M) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq -\frac{1}{4}\right\} \cup \{\infty\}.$$

(b)

$$f(z) = \frac{1}{2(1+i)} \frac{1}{1 + \frac{z-2}{2(1+i)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(1+i)^{n+1}} (z-2)^n$$

pro $|z-2| < 2\sqrt{2}$.

2. At $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1)(z^2+4)}$. Funkce $f(z)$ má jediné izolované singularity v bodech $\pm 2i$ a 1. Proto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 2\pi i \operatorname{res}_{2i} f(z) + i\pi \operatorname{res}_1 f(z) = \pi \frac{e^{-2}}{2(2i-1)} + i\pi \frac{e^i}{5} \\ &= \frac{\pi}{5} \left(-\frac{1+2i}{2e^2} + i \cos 1 - \sin 1 \right). \end{aligned}$$

Odtud

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x-1)(x^2+4)} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{5} \left(-\frac{1}{e^2} + \cos 1 \right).$$

3. Aplikací Z-transformace na zadanou diferenční rovnici dostaneme

$$z[Y(z) + 1] + \left(3 - \frac{4}{z}\right)Y(z) = \frac{2z}{z+1}.$$

Odtud $Y(z) = \frac{-z^2}{(z+1)(z+4)}$. Proto

$$y_n = \operatorname{res}_{-1} Y(z)z^{n-1} + \operatorname{res}_{-4} Y(z)z^{n-1} = \frac{(-1)^n + (-4)^{n+1}}{3}$$

pro $n \geq 0$.

4. (a)

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^1 e^{t(1-i\omega)} dt = \frac{e^{1-i\omega} - 1}{1-i\omega}.$$

(b)

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= \mathcal{F} [f'(1-t)e^{it}] (\omega) = \mathcal{F} [f'(1-t)] (\omega - 1) = \mathcal{F} [f'(1+t)] (1 - \omega) \\ &= e^{i(1-\omega)} \mathcal{F} [f'(t)] (1 - \omega) = i(1 - \omega)e^{i(1-\omega)} \hat{f}(1 - \omega)\end{aligned}$$

(c) Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ máme

$$c_n = \frac{1}{2} \hat{f}(\pi n) = \frac{1}{2} \frac{e^{1-i\pi n} - 1}{1 - i\pi n} = \frac{(-1)^n e - 1}{2(1 - i\pi n)}.$$

Fourierova řada funkce $f(t)$ proto je

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n e - 1}{2(1 - i\pi n)} e^{i\pi n t}.$$

Zadání B

1. (a) Přímočarým výpočtem zjistíme, že $\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když $e^{-2x}(4 - \alpha^2) \sin(\alpha y) = 0$ na $\mathbb{R}^2$. Tedy u je harmonická funkce na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když $\alpha \in \{-2, 0, 2\}$.
- (b) Ať $\alpha = -2$. Pak Cauchyovy-Riemannovy podmínky jsou

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= -2e^{-2x} \sin(-2y) + 3x^2 - 3y^2 - 2, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2e^{-2x} \cos(-2y) + 6xy.\end{aligned}$$

Integrací druhé podmínky dostaneme

$$v(x, y) = -e^{-2x} \cos(2y) + 3x^2 y + C(y).$$

Dosazením do první podmínky obdržíme $C'(y) = -3y^2 - 2$. Tedy $C(y) = -y^3 - 2y + K$, kde $K \in \mathbb{R}$. Protože $f\left(i\frac{\pi}{4}\right) = -1 - i\frac{\pi}{2}$, je

$$-\frac{\pi}{2} = v\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = C\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^3}{4^3} - \frac{\pi}{2} + K.$$

Odtud $K = \frac{\pi^3}{4^3}$, a proto

$$v(x, y) = -e^{-2x} \cos(2y) + 3x^2 y - y^3 - 2y + \frac{\pi^3}{4^3}.$$

2. (a)

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{3}{2z^4(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{z^4} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{z^4} \left(-\sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^{n+1} z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} [-1 + (-2)^{n+1}] z^{n-4}\end{aligned}$$

pro $0 < |z| < \frac{1}{2}$.

- (b) Z rozkladu jmenovatele funkce $f(z)$ na kořenové činitele (viz bod (a)) je vidět, že 0 je pól řádu 4 a body 1 a $-\frac{1}{2}$ jsou póly řádu 1. Z Laurentovy řady z bodu (a) plyne, že $\text{res}_0 f(z) = 15$.
- (c) Díky bodu (a) víme, že na $P(0)$ je

$$f(z) = -\frac{3}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{9}{z^2} + \frac{15}{z} + \dots$$

Proto můžeme volit například $g(z) = \frac{3}{z^4} - \frac{14}{z}$.

3. (a)

$$\begin{aligned}F(s) &= \mathcal{L} \left[(\cos t)(1 - \mathbf{1}(t - \pi)) - e^{-(t-\pi)} \mathbf{1}(t-\pi) \right] (s) \\ &= \frac{s}{s^2 + 1} - e^{-\pi s} \mathcal{L} [\cos(t + \pi)] (s) - e^{-\pi s} \mathcal{L} [e^{-t}] (s) \\ &= \frac{s}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} \mathcal{L} [\cos t] (s) - e^{-\pi s} \frac{1}{s + 1} = \frac{s(1 + e^{-\pi s})}{s^2 + 1} - \frac{e^{-\pi s}}{s + 1}.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathcal{L} [e^{-2t} f'(3t)](s) = \mathcal{L} [f'(3t)](s+2) = \frac{1}{3} \mathcal{L} [f'(t)] \left(\frac{s+2}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{s+2}{3} F \left(\frac{s+2}{3} \right) - f(0) \right] = \frac{s+2}{9} F \left(\frac{s+2}{3} \right) - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4. Aplikací Fourierovy transformace na zadanou rovnici dostaneme $-\omega^2 \hat{y}(\omega) - 4\hat{y}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - 3i\omega - 2}$. Odtud

$$\hat{y}(\omega) = -\frac{1}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 - 3i\omega - 2)} = -\frac{1}{(\omega + 2i)(\omega - 2i)^2(\omega - i)}.$$

Proto pro $t \geq 0$ je

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = i [\text{res}_i \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} + \text{res}_{2i} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t}] \\ &= \frac{e^{-t}}{3} - \frac{te^{-2t}}{4} - \frac{5}{16} e^{-2t} \end{aligned}$$

a pro $t < 0$ je

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = -i \text{res}_{-2i} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} = \frac{e^{2t}}{48}.$$

Zadání C

1. (a) Položme $w = \frac{z-2i}{z+\alpha}$. Vyjádříme-li z rovnosti z , dostaneme $z = \frac{-\alpha w - 2i}{w-1}$. Tedy $f^{-1}(z) = -\frac{\alpha z + 2i}{z-1}$.

(b)

$$\begin{array}{ccc} \infty & \xrightarrow{f} & 1 \\ \uparrow K & & \uparrow f(K) \\ -\alpha & \xrightarrow{f} & \infty \end{array}$$

Protože $-\alpha$ a ∞ jsou vzájemně inverzní body vzhledem ke kružnici K , je $\alpha = i$. Poloměr kružnice K je

$$R = |f^{-1}(0) - (-i)| = |2i + i| = 3.$$

2. (a) Označme $g(z) = 1 - \cos(\pi z)$. Z definice funkce kosínus (v komplexním oboru) okamžitě plyne, že $g(z) = 0$ právě tehdy, když $e^{i\pi z} + e^{-i\pi z} = 2$. Tedy $g(z) = 0$ právě tehdy, když

$$0 = e^{2i\pi z} - 2e^{i\pi z} + 1 = (e^{i\pi z} - 1)^2.$$

Odtud vidíme, že $g(z) = 0$ právě tehdy, když $z = 2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Protože $g'(2k) = 0$ a $g''(2k) = \pi^2 \neq 0$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$, je $2k$ kořen násobnosti 2 funkce $g(z)$. Dále funkce $z^2 - z - 2$ má v bodech 1 a 2 kořeny násobnosti 1. Proto 2 je pól řádu 1 funkce $f(z)$ a pro každé $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ je bod $2k$ pól řádu 2 funkce $f(z)$.

(b)

$$\int_C \varphi(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_0 z f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2(z^2 - z - 2)}{1 - \cos(\pi z)} = -\frac{8i}{\pi},$$

kde limitu jsme spočetli dvojnásobnou aplikací l'Hospitalova pravidla.

3. (a) Protože

$$\frac{1}{3+2z} = \frac{1}{2z} \frac{1}{1 + \frac{3}{2z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{2^{n+1}} \frac{1}{z^{n+1}}$$

pro $|z| > \frac{3}{2}$ a

$$\ln\left(1 - \frac{3}{z}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{3}{z}\right)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n} \frac{1}{z^n}$$

pro $|z| > 3$, je

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{2^{n+1}} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-3)^{n-1}}{2^n} + \frac{3^n}{n} \right] \frac{1}{z^n}$$

pro $|z| > 3$.

(b) Díky bodu (a) okamžitě vidíme, že

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 0; \\ \frac{(-3)^{n-1}}{2^n} + \frac{3^n}{n} & n \geq 1. \end{cases}$$

(c)

$$\mathcal{Z}[4^n a_{n+2}](z) = \mathcal{Z}[a_{n+2}]\left(\frac{z}{4}\right) = \frac{z^2}{16} \left[A\left(\frac{z}{4}\right) - a_0 - \frac{a_1}{\frac{z}{4}} \right] = \frac{z^2}{16} A\left(\frac{z}{4}\right) - \frac{7z}{8},$$

kde v poslední rovnosti jsme využili toho, že díky bodu (b) je $a_0 = 0$ a $a_1 = \frac{7}{2}$.

4. Aplikací Laplaceovy transformace na zadanou rovnici dostaneme

$$s^2 Y(s) - s - 2 + sY(s) - 1 - 6Y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{e^{-4}e^{-2s}}{s+2}.$$

Odtud

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)(s-2)} + \frac{1}{s-2} - \frac{e^{-4}e^{-2s}}{(s+2)(s+3)(s-2)}.$$

Označme $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)(s-2)}$. Laplaceův vzor funkce $G(z)$ je

$$g(t) = \operatorname{res}_{-3} G(s)e^{st} + \operatorname{res}_{-2} G(s)e^{st} + \operatorname{res}_2 G(s)e^{st} = \frac{1}{5}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{20}e^{2t}.$$

Proto

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) + e^{2t} - e^{-4}g(t-2)\mathbf{1}(t-2) \\ &= \frac{1}{5}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{21}{20}e^{2t} - e^{-4} \left[\frac{1}{5}e^{-3(t-2)} - \frac{1}{4}e^{-2(t-2)} + \frac{21}{20}e^{2(t-2)} \right] \mathbf{1}(t-2) \end{aligned}$$

pro $t \geq 0$.

Zadání D

1. (a) Protože

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = ze^z,$$

pro $z \in \mathbb{C}$, je

$$f(z) = \int ze^z dz = ze^z - \int e^z dz = ze^z - e^z + K,$$

kde $K \in \mathbb{C}$, pro $z \in \mathbb{C}$. Dosazením $z = 0$ do zadané řady dostaneme $0 = f(0) = -1 + K$, a proto $K = 1$. Tedy

$$f(z) = (z - 1)e^z + 1$$

pro $z \in \mathbb{C}$ (tj. hledaný poloměr konvergence je $R = +\infty$).

- (b) Z bodu (a) plyne, že

$$\operatorname{res}_0 \frac{f(z)}{z^k} = \begin{cases} 0, & k \in \{1, 2\}; \\ \frac{1}{(k-3)!(k-1)}, & k \geq 3. \end{cases}$$

Tedy $\frac{1}{8} = \operatorname{res}_0 \frac{f(z)}{z^k}$ právě tehdy, když $k = 5$.

2. Komplexní číslo z je řešením rovnice $z^3 + 1 = 0$ právě tehdy, když $z = e^{i\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi i}{3}}$, kde $k = 0, 1, 2$. Proto funkce $f(z) = \frac{z-1}{z^3+1}$ je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \left\{ e^{i\frac{\pi}{3}}, -1, e^{i\frac{5\pi}{3}} \right\}$. Tedy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+1} dx &= i\pi \operatorname{res}_{-1} f(z) + 2\pi i \operatorname{res}_{e^{i\frac{\pi}{3}}} f(z) = i\pi \left. \frac{z-1}{3z^2} \right|_{z=-1} + 2i\pi \left. \frac{z-1}{3z^2} \right|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}} \\ &= -\frac{2i\pi}{3} + 2i\pi \left. \frac{z^2-z}{3z^3} \right|_{z=e^{i\frac{\pi}{3}}} = -\frac{2i\pi}{3} - 2i\pi \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}}{3} \\ &= -\frac{2i\pi}{3} - 2i\pi \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}+i\pi} - e^{i\frac{\pi}{3}}}{3} = -\frac{2i\pi}{3} + 2i\pi \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}}{3} \\ &= -\frac{2i\pi}{3} + 2i\pi \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3} = 0. \end{aligned}$$

3. Aplikací Z-transformace na zadanou rovnici obdržíme

$$z[Y(z) - 1] + Y(z) = \mathcal{Z}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right](2z) = \frac{4z^2}{4z^2+1}.$$

Proto

$$Y(z) = \frac{z}{z+1} + \frac{z^2}{\left(z^2 + \frac{1}{4}\right)(z+1)}.$$

Ať $A(z) = \frac{z^2}{\left(z^2 + \frac{1}{4}\right)(z+1)}$. Potom pro $n \geq 0$ je

$$\begin{aligned} y_n &= (-1)^n + \operatorname{res}_{-1} A(z)z^{n-1} + \operatorname{res}_{\frac{i}{2}} A(z)z^{n-1} + \operatorname{res}_{-\frac{i}{2}} A(z)z^{n-1} \\ &= (-1)^n + \frac{4(-1)^{n+1}}{5} + \frac{i^{n+1}}{2^{n+1}\left(i - \frac{1}{2}\right)} + \frac{(-i)^{n+1}}{2^{n+1}\left(-i - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{(-1)^n}{5} + 2\operatorname{Re}\left[\frac{i^{n+1}}{2^{n+1}\left(i - \frac{1}{2}\right)}\right] = \frac{(-1)^n}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}} \operatorname{Re}\left[2i^n - i^{n+1}\right]. \end{aligned}$$

4. (a) Komplexní číslo s je řešením rovnice $1 - e^{4s} = 0$ právě tehdy, když $s = \frac{in\pi}{2}$ pro nějaké $n \in \mathbb{Z}$. Ať $n \in \mathbb{Z}$. Protože $(1 - e^{-4s})' \big|_{s=\frac{in\pi}{2}} = 4 \neq 0$, je bod $\frac{in\pi}{2}$ kořen násobnosti 1 funkce $h(s) = (s^2 - 9)(1 - e^{-4s})$. Z tvaru funkce $h(s)$ okamžitě vidíme, že body ± 3 jsou také kořeny násobnosti 1 funkce $h(s)$. Tedy

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{res}_{-3} F(s)e^{st} + \operatorname{res}_3 F(s)e^{st} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{res}_{\frac{in\pi}{2}} F(s)e^{st} \\ &= \frac{e^{3t}}{2(1 - e^{-12})} + \frac{e^{-3t}}{2(1 - e^{12})} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{in\pi}{2n^2\pi^2 + 72} e^{\frac{in\pi}{2}t}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(f * g)(t)](s) &= F(s)\mathcal{L}[e^{-2t}f(3t)](s) = F(s)\mathcal{L}[f(3t)](s+2) \\ &= \frac{1}{3}F(s)F\left(\frac{s+2}{3}\right). \end{aligned}$$