

Komplexní analýza a transformace

Úvod

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
martin.bohata@fel.cvut.cz

Stránky předmětu:

<https://moodle.fel.cvut.cz/courses/B3B01KAT1>

Obsah kurzu:

- 1 Komplexní analýza
- 2 Z-transformace
- 3 Laplaceova transformace
- 4 Fourierovy řady a Fourierova transformace

Kde lze potkat témata probíraná v kurzu?

- Matematika (výpočty integrálů, diferenciální rovnice, harmonická analýza, stochastické procesy, . . .)
- Fyzika (optika, kvantová teorie, statistická fyzika, . . .)
- Teorie obvodů
- Teorie signálů
- Zpracování obrazu
- Teorie řízení
- $\vdots$

Uvažme rovnici

$$x^2 + 1 = 0.$$

- Tato rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel!
- Lze rozšířit reálná čísla tak, aby řešení existovalo?
- Pokud ano, jak vypadá číslo x splňující $x^2 = -1$?
- Jak je definováno násobení v tomto rozšíření reálných čísel?

Komplexní čísla

Definice (množina komplexních čísel)

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ vybavenou operacemi

- ❶ sčítání: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- ❷ násobení: $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Množinu komplexních čísel značíme symbolem $\mathbb{C}$.

Snadno ukážeme, že pro všechna $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ platí:

- $z_1z_2 = z_2z_1$;
- $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$;
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Algebraický tvar komplexního čísla

- $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ a $(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0)$. Reálná čísla chápeme jako speciální případ komplexních čísel (ztotožníme $(x, 0) \in \mathbb{C}$ s $x \in \mathbb{R}$).
- $(x_1, 0)(x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2)$.
- Prvek $(0, 1)$ se nazývá **imaginární jednotka** a označuje se symbolem i . Platí

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0).$$

- Protože $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$, budeme psát

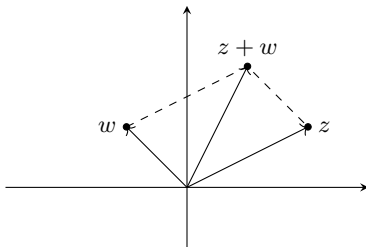
$$z = x + iy.$$

Terminologie a značení:

- $z = x + iy$... **algebraický tvar** komplexního čísla z .
- x ... **reálná část** komplexního čísla z . Píšeme $\operatorname{Re} z = x$.
- y ... **imaginární část** komplexního čísla z . Píšeme $\operatorname{Im} z = y$.

Geometrický význam sčítání

$z \mapsto z + w \dots$ posun v rovině o vektor $w \in \mathbb{C}$.



Komplexní sdružení a absolutní hodnota

Definice (komplexní sdružení a absolutní hodnota)

Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

- 1 **Komplexně sdruženým číslem k číslu z** nazveme číslo $\bar{z} = x - iy$.
- 2 **Absolutní hodnotou** (případně **velikostí** nebo **modulem**) **komplexního čísla z** rozumíme číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$. Navíc $|z| = 0$ právě tehdy, když $z = 0$.
- Jak vypadá inverzní prvek $z^{-1} = \frac{1}{z}$ k z vůči násobení?
 - pro $z = 0$ prvek $z^{-1} \in \mathbb{C}$ neexistuje;
 - pro $z \neq 0$ je $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

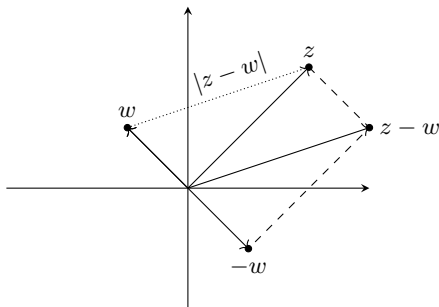
Odtud pro $z \neq 0$ dostaneme $\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$.

Příklad

Ať $z = 2 + i$ a $w = 1 - 3i$. Potom $|z - w| = \sqrt{17}$, $\operatorname{Re} \frac{w}{z} = -\frac{1}{5}$ a $\operatorname{Im} \frac{w}{z} = -\frac{7}{5}$.

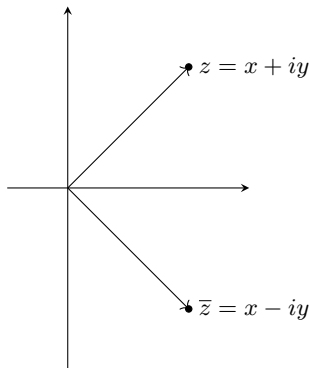
Vzdálenost dvou bodů

Vzdálenost bodů z a w je $|z - w|$.



Geometrický význam komplexního sdružení

$z \mapsto \bar{z}$... osová souměrnost (neboli zrcadlení) kolem reálné osy.



Základní vztahy

Tvrzení (základní vztahy)

Ať $z, w \in \mathbb{C}$. Potom

- 1 $\overline{\overline{z}} = z;$
- 2 $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w};$
- 3 $\overline{zw} = \overline{z} \overline{w};$
- 4 $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}},$ kdykoli $w \neq 0;$
- 5 $\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$ a $\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i};$
- 6 $|z| = |\overline{z}|;$
- 7 $|zw| = |z| |w|;$
- 8 $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},$ kdykoli $w \neq 0.$
- 9 $|z + w| \leq |z| + |w|.$

Důkaz: Domácí cvičení. ■

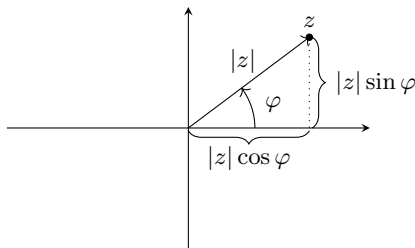
- Na $\mathbb{C}$ není definováno uspořádání!

Goniometrický tvar komplexního čísla

- Pro každé $\varphi \in \mathbb{R}$ definujeme

$$e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

- Pro každé $\varphi \in \mathbb{R}$ je $|e^{i\varphi}| = 1$.
- Nechť z je nenulové komplexní číslo.



Z obrázku vidíme, že

$$z = |z| e^{i\varphi}.$$

Goniometrický tvar komplexního čísla

Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zavádíme následující terminologii a značení:

- $z = |z| e^{i\varphi} \dots$ **goniometrický tvar komplexního čísla z** .
- $\varphi \dots$ **argument** komplexního čísla z .
- $\text{Arg } z = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid z = |z| e^{i\varphi}\} \dots$ **množina všech argumentů komplexního čísla z** .
- $\varphi \in (\text{Arg } z) \cap (-\pi, \pi]$ se nazývá **hlavní hodnota argumentu komplexního čísla z** a značí se $\arg z$.

Příklad

Je-li $z = 1 - i$, pak $|z| = \sqrt{2}$, $\text{Arg } z = \left\{ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ a $\arg z = -\frac{\pi}{4}$.

Argument komplexního čísla

Tvrzení (o hlavní hodnotě argumentu)

Je-li $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, potom

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{je-li } x > 0; \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{je-li } y > 0; \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{je-li } y < 0; \\ \pi, & \text{je-li } x < 0 \text{ a } y = 0. \end{cases}$$

Důkaz: Viz cvičení. ■

Tvrzení (o násobení komplexních jednotek)

Pro každé $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ je

$$e^{i\varphi} e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}.$$

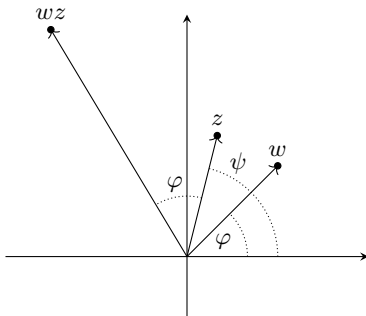
Důkaz: Viz přednáška. ■

Geometrický význam násobení

Mějme dvě nenulová komplexní čísla $w = |w| e^{i\varphi}$ a $z = |z| e^{i\psi}$. Potom

$$wz = |wz| e^{i(\varphi+\psi)}.$$

$z \mapsto wz \dots$ otočení o úhel $\arg w$ a poté stejnoolehlost se středem v počátku a koeficientem $|w|$.



Moivreova věta

Definujeme:

- $z^0 = 1$ pro každé $z \in \mathbb{C}$;
- $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $n \in \mathbb{N}$.

Věta (Moivreova věta)

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ platí

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

Příklad

Uvažme rovnici $z^4 = -1$. Z Moivreovy věty plyne, že množina všech jejích řešení je

$$\left\{ e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)} \mid k = 0, 1, 2, 3 \right\}.$$

Rozšířená komplexní rovina

Množina $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se nazývá **rozšířená komplexní rovina**.

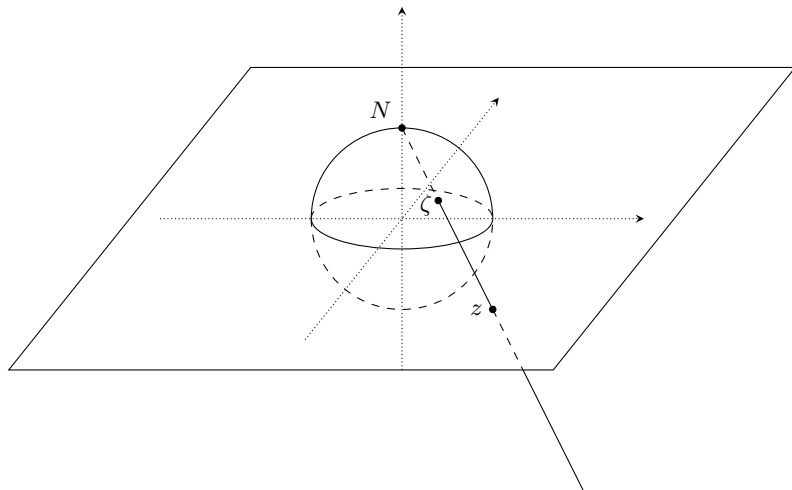
Definujeme:

- $z + \infty = \infty + z = \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C}$;
- $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$;
- $\frac{z}{\infty} = 0$ pro každé $z \in \mathbb{C}$;
- $\frac{z}{0} = \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$.

Nedefinujeme: $\infty + \infty$, $\infty \cdot 0$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.

Jak si geometricky představit $\mathbb{C}_\infty$?

- **Riemannova sféra** ... sféra se středem v počátku a poloměrem 1.
- **Stereografická projekce** ... zobrazení $\zeta \mapsto z$ dle obrázku níže.



Okolí bodu

Definice (okolí bodu)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $\varepsilon > 0$.

- ❶ Množinu $U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ nazýváme **okolí** bodu z_0 poloměru ε .
 - ❷ Množinu $P(z_0, \varepsilon) = U(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ nazýváme **prstencové okolí** bodu z_0 poloměru ε .
 - ❸ Množinu $U(\infty, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \varepsilon\}$ nazýváme **okolí** bodu ∞ poloměru ε .
-
- Nebude-li nutné určit konkrétní velikost okolí, pak budeme stručněji psát jen $U(z_0)$, $P(z_0)$, $U(\infty)$.

Otevřené a uzavřené množiny

Definice (hranice, otevřená a uzavřená množina)

Nechť $M \subseteq \mathbb{C}$.

- 1 Řekneme, že M je **otevřená**, jestliže pro každé $z \in M$ existuje $U(z)$ tak, že $U(z) \subseteq M$.
- 2 Bod $z \in \mathbb{C}$ se nazývá **hraniční bod** množiny M , jestliže pro každé $U(z)$ jsou množiny $U(z) \cap M$ a $U(z) \cap (\mathbb{C} \setminus M)$ neprázdné.
- 3 **Hranice** ∂M množiny M je množina všech hraničních bodů množiny M .
- 4 Řekneme, že M je **uzavřená**, jestliže $M = M \cup \partial M$.

Příklad

- 1 $\emptyset$ a $\mathbb{C}$ jsou současně otevřené i uzavřené množiny.
- 2 $U(\infty)$, $U(z)$ a $P(z)$, kde $z \in \mathbb{C}$, jsou otevřené množiny.
- 3 $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ není uzavřená ani otevřená.

Posloupnosti komplexních čísel

Definice (limita posloupnosti komplexních čísel)

Řekneme, že $L \in \mathbb{C}_\infty$ je **limita posloupnosti** $(z_n)_{n=0}^{+\infty}$ **komplexních čísel** (případně $(z_n)_{n=0}^{+\infty}$ **konverguje k L**), jestliže pro každé $U(L)$ existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq N$ je $z_n \in U(L)$. Píšeme $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = L$ (nebo $z_n \rightarrow L$ pro $n \rightarrow +\infty$).

Tvrzení (souvinnost mezi limitami reálných a komplexních posloupností)

At' $(z_n)_{n=0}^{+\infty}$ je posloupnost komplexních čísel a $L \in \mathbb{C}$.

- ① $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = L$ právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} L$ a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} L$.
- ② $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \infty$ právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Posloupnosti komplexních čísel

- Limita posloupnosti je určena jednoznačně.
- Platí věta o aritmetice limit obdobně jako v reálném případě.

Příklad

① $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2n-in}{n+1} = 2 - i.$

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} i^n$ neexistuje.

③ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n = \infty.$